UNIVERSITY OF ARIZONA
39001006926771

EDWIN M. BLAKE,
BROOKLYN, N. Y.

CLASS

No. 382

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

https://archive.org/details/ueberdiehypergeo0000fkle

Ueber die hypergeometrische Function.

Vorlesung,

gehalten im Wintersemester 1893/94

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von E. Ritter.

GÖTTINGEN 1894.

UNIVERSITY OF ARIZONA
LIBRARY

517.88
K64u

Inhalts-Verzeichniss.

I. Die historische Entwickelung bis einschliesslich Riemanns Arbeit von 1857.

Seite

Einleitung: Das erste Auftreten der hypergeometrischen Function als Reihe, Differentialgleichung und bestimmtes Integral 1

A. Nähere Betrachtung der hypergeometrischen Reihe.

Gauss' Arbeit: Die Convergenz, die verwandten Functionen, der Werth von F (a, b, c, 1) 13
Allgemeine Regeln für das Verhalten der Reihe auf dem Convergenzkreise . 25
Verschiedene Verallgemeinerungen 36

B. Nähere Betrachtung der Differentialgleichung.

Die Riemann'sche Bezeichnung der P-Function 41
Existenz der Lösungen im complexen Gebiet und Convergenz der zugehörigen Potenzreihen 49
Reihenentwickelung für die Umgebung des einzelnen singulären Punctes . . 58
Ganzzahlige Exponentendifferenzen liefern Ausnahmefälle der 1ten oder 2ten Art 63
Die logarithmischen Entwickelungen der Ausnahmefälle 1ter Art 73
Die 24 Reihen von Kummer und ihr Convergenzbereich 77
Lineare Beziehungen zwischen den verschiedenen Fundamentallösungen . . . 88
Riemann's Grundauffassung: Die Monodromiegruppe der P-Function 95
Von der kanonischen Form der einzelnen erzeugenden Substitution 104

C. Nähere Betrachtung des Integrals.

Ueber die Wahl des Integrationsweges und die Einführung homogener Variabler 112
Die Grundeigenschaften der Γ-Function 121
Definition von Γ durch das Schleifenintegral 135
Symmetrische Entwickelungen beim Euler'schen Integral erster Art 140
Verallgemeinerung der Euler'schen Integrale 151
Das hypergeometrische Integral, seine Vieldeutigkeit 158
Dasselbe in functionentheoretischer Auffassung. Der Zusammenhang mit der P-Function 171

Seite
Fortschritte betr. die Theorie der P-Function, die hier resultiren 184
Von den acht Integralen, die zu derselben P-Function gehören. Die homogene Normirung der P-Function 192
Anhang: Ueber reguläre lineare Differentialgleichungen 2ter Ordnung mit n singulären Puncten 206

D. Abschliessende Bemerkungen zu Riemann's Abhandlung von 1857.

Der allgemeine Charakter der Abhandlung, ihre Gliederung 211
Bedeutung des Werthes der Exponentensumme. Eventuelles Auftreten von Nebenpuncten 221
Die verwandten Functionen, Gauss' Kettenbruch 230
Verallgemeinerung: Das Fragment XXI aus Riemann's Nachlass 238

II. Die conforme Abbildung durch den Quotienten η.

A. Der allgemeine Ansatz.

1. Von der Differentialgleichung 3ter Ordnung des η.

Einführung der Differentialgleichung 250
Die allgemeine Lösung und die conforme Abbildung 258
Rückbeziehung zur linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung, die Riccatische Differentialgleichung 265
Excurs über die Lie'sche Auffassungsweise 272
Die gewöhnliche Riccatische Gleichung und die Bessel'schen Functionen . . . 278

2. Uebersicht über die sphärische Trigonometrie.

Die elementaren Ansätze, analytische Auffassung 285
Die transcendente Trigonometrie und die verschiedenen Stufen der algebraischen Trigonometrie 291
Der „Kern" und die „verwandten" Dreiecke 299
Ausführungen zur algebraischen Trigonometrie. 306
Trigonometrie als Invariantentheorie dreier diametraler quadratischer Formen . 315
Uebertragung auf beliebige quadratische Formen 326
Excurs über Nichteuklidische Geometrie 332
Die Schilling'sche Figur 344
Die kinematische Bedeutung des Kerns 352

3. Der Fundamentalbereich der η-Function.

Das Verhältniss zwischen Bereich und Kern 358
Die Substitutionen der Monodromiegruppe und die Formeln der sphärischen Trigonometrie 367
Verwandte Functionen; Nebenpunkte etc. 372

Seite

B. Der besondere Fall reeller Exponenten.

1. Einleitung:

Die Kreisbogendreiecke als Flächen 375

Die Ergänzungsrelation 384

2. Genaueres Studium der Dreiecke.

Grundlegende Beziehungen. Die drei Fälle des Kerns 385

Die Maasszahlen der Winkel und Seiten 394

Die zu einem Kern gehörigen reducirten Dreiecke 401

Besonderheiten des Falles II. 410

Uebergang zu den allgemeinsten Dreiecksflächen 415

Die Fälle ganzzahliger Exponenten 425

Der Bessel'sche Gränzfall 435

3. Die functionentheoretische Bedeutung der Figuren.

Von der Gleichung $\eta =$ Const. 438

Von der zu zwei verwandten P-Functionen gehörigen Determinante 446

4. Die analytische Fortsetzung der η-Function.

Die Einführung des Symmetrieprinzips 457

Erste Anwendung: **Die Zurückführung auf niedere Functionen.**

Rationale Functionen 467

Algebraische Functionen, insbesondere der Jcosaederfall. 472

Allgemeines über rationale Transformation 485

Zusammenhänge zwischen verwandten Functionen 490

η-Functionen, die sich auf unbestimmte Integrale reduciren lassen 501

Stellung zu Picard und Vessiot 510

Zweite Anwendung: **Die Zurückführung auf eindeutige Functionen.**

η-Functionen, die sich eindeutig umkehren lassen 522

Darstellung aller η durch diese besonderen η 537

C. Anhang: Bemerkungen zur geometrischen Theorie im Falle complexer Exponenten.

Rein imaginäre Exponenten. 551

Der allgemeine Fall . . . . . 559—569

Anmerkung: Fortsetzung von Seite 430 siehe Seite 434.

[Do. d. 26. X. 93.]

In der niederen Analysis beschränkt man sich auf eine begrenzte Reihe von Funktionen, welche durch die sogenannten elementaren Rechenoperationen entstehen, sowie die einfachsten Erweiterungen, die Exponentialfunktion samt den trigonometrischen Funktionen, und den Logarithmus.

Darüber hinaus haben in der höheren Analysis besonders zwei Kategorien von Funktionen besondere Wichtigkeit gewonnen:

1.) Die elliptischen Funktionen und ihre verschiedenen Verallgemeinerungen, wie hyperelliptische Integrale und Funktionen, Abelsche Integrale und Funktionen.

2.) Solche Funktionen, welche durch lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung definirt sind — und welche uns gerade in dieser Vorlesung speciell interessiren sollen —, folgender Art:

$$L\frac{d^2y}{dx^2} + M\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

wo unter L, M, N rationale Funktionen von x verstanden sind, und y die zu definirende Funktion vorstellt. Hierher gehören z.B. die Kugelfunktionen, die Bessel'schen Funktionen u.s.w. als Beispiele, die in der mathematischen

Physik ausgezeichnete Verwendung finden. Aber all diese eben genannten Fälle werden umfasst durch die hypergeometrische Funktion.

Die darüber hinausgehende Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichung (nicht nur derjenigen 2. Ordnung.) beschäftigt noch, jetzt in besonderem Masse das Interesse der Mathematiker

Die unter 1) genannten Funktionen sind schon seit langer Zeit in Vorlesungen wie in Lehrbüchern, an jeder Universität und in jeder Sprache, eingehend behandelt worden, während die Funktionen der zweiten Klasse verhältnismäßig noch lange nicht so allgemein bekannt sind, wie sie es sowohl wegen ihrer interessanten Eigenschaften und der durch sie eröffneten weiteren Perspektiven, als auch um ihrer praktischen Verwendbarkeit willen verdienen. Denn wie die elliptischen Funktionen z. B. zum Studium der Pendelschwingungen, so sind die hypergeometrischen Funktionen fundamental für die Theorie der schwingenden Membranen, in der rechnenden Astronomie beim Kepler'schen Problem u. s. w.

Erster Theil.

Historische Entwicklung bis einschließlich Riemanns Arbeit von 1857.

Im Mittelpunkt unserer Betrachtungen über die

hypergeometrische Function wird die Arbeit von Riemann stehen: „Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ darstellbaren Functionen." Abh. d. Kgl. Ges. d. W. z. Gött Bd. 7. 1857, Ges. Werke S. 62. ff. Das vollständige und allseitige Verständnis dieser Arbeit und ihrer Tragweite zu erwecken wird ein Hauptziel meiner Vorlesung sein.

Uebrigens schliesse ich mich aber zunächst an die historische Entwicklung unseres Gegenstandes an.

Es sind drei coordinirte Gesichtspunkte, unter welchen sich historisch betrachtet den Mathematikern die hypergeometrische Funktion zuerst dargeboten hat:

1.) als Potenzreihe: hypergeometrische Reihe.

2.) als Integral einer gewissen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung, hypergeometrische Differentialgleichung.

3.) als bestimmtes Integral: hypergeometrische Integrale.

Alle diese Gesichtspunkte treten bereits bei Euler hervor.

Ad. 1) Unter der hypergeometrischen Reihe versteht man folgende Potenzreihe:

$$F(a,b,c,x) = 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1.2 \cdot c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2) \cdot b(b+1)(b+2)}{1.2.3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots$$

Was den Namen „hypergeometrische Reihe" betrifft, so kommt dieser zuerst bei Wallis[1]) vor, und zwar

1.) Wallis: Arithmetica infinitorum 1655. (In unserer Bibliothek Gesammtausgabe der Opuscula 1695. (Bd. I.)

wird er vorgeschlagen, weil eben das Bildungsgesetz der einzelnen Glieder ein höheres ist als dasjenige der geometrischen Reihen a, ab, ab^2, .. welche man bis dahin allein betrachtet hatte. Bei Wallis ist aber die hypergeometrische Reihe noch keine Potenzreihe, als solche, und als Function der Größe x aufgefasst tritt sie zuerst bei Euler auf in einer Abhandlung vom Jahre 1778 [2] oder auch schon vorher in etwas allgemeinerer Form in Bd. II der Integralrechnung (1769) [3].

Insofern wir — was nun wesentlich ist — die hypergeometrische Reihe als Function von x auffassen, nennen wir sie die „hypergeometrische Function." Später werden wir jedoch diesen Begriff etwas weiter fassen, indem wir unsere durch die obige Reihe definirte Function noch mit einer Potenz von x, einer solchen von $(1-x)$ und mit einer von x unabhängigen willkürlichen Constanten multipliciren.

Im allgemeinen Sinne verstehen wir also unter einer hypergeometrischen Function eine Function folgender Art:

$$C \cdot x^a (1-x)^b \cdot F(a, b, c, x);$$

2) Euler: Specimen transformationis singularis serierum. Nova acta Petropolitana Bd. 12. 1778.

3) — : Institutiones calculi integralis. 1769.

Wir erwähnen hier gleich den Namen Joh. Friedr. Pfaff, eines der bedeutendsten Mathematiker Deutschlands zu Ende des vorigen Jahrhunderts, für uns dadurch besonders von Bedeutung, weil er als Professor an der — später mit Göttingen vereinigten — Universität Helmstädt Lehrer von Gauss gewesen ist. Es würde ohne Zweifel interessant sein, zu verfolgen, in wie weit die Gauss'sche Arbeit über die hypergeometrische Reihe mit den Ideen von Pfaff zusammenhängt.

Pfaff hat im Jahre 1797 ein Werk: Disquisitiones analyticae Vol. I." erscheinen lassen, in welchem unserer Reihe ein besonderes Kapitel gewidmet ist, und worin zum ersten Male auch für die Potenzreihe (nicht nur für die Wallis'sche Reihe) der Name „hypergeometrische Reihe" gebraucht wird. Pfaff stellt sich darin die Frage, auf die wir noch oft zurückkommen, und die auch Euler schon in Angriff genommen hatte: Wann kann man die hypergeometrische Reihe auf niedere Functionen zurückführen? Und er findet eine große Reihe solcher Fälle. Ein zweiter Band, für welchen er weitere Untersuchungen in Aussicht stellt, ist nicht erschienen

Ad 2) Die durch unsere Reihe definirte Function

genügt einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche ebenfalls schon Euler an der genannten Stelle ausgerechnet hat; er findet nämlich:

$$x(1-x).\frac{d^2F}{dx^2}+(c-(a+b+1)x)\frac{dF}{dx}-ab.F=0.$$

Die Reihe ist ein particuläres Integral dieser Gleichung.

Wir unsererseits kehren den Gedankengang um, indem wir unter einer hypergeometrischen Function nicht nur dieses eine, sondern allgemein irgend ein Integral der vorstehenden Differentialgleichung verstehen wollen.

Wir setzen, indem wir unter y die allgemeinere auf der vorigen Seite definirte hypergeometrische Function verstehen:

$$y=C.x^{\alpha}.(1-x)^{\gamma}.F(a,b,c,x)$$

Führen wir ferner um der Symmetrie des Resultates willen durch folgende Gleichungen gewisse sechs Constanten ein:

$$\alpha=\alpha \qquad \beta=a-\alpha-\gamma \qquad \gamma=\gamma$$
$$\alpha'=1-c+\alpha \qquad \beta'=b-\alpha-\gamma \qquad \gamma'=c-a-b+\gamma,$$

welche der Relation genügen:

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1,$$

so zeigt sich, daß y folgender Gleichung, der „allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung" genügt:

$$x^2(1-x)^2\frac{d^2y}{dx^2} - x(1-x)\left\{(\alpha+\alpha'+1)+(\beta+\beta'+1)x\right\}\frac{dy}{dx} +$$
$$\left\{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'-\gamma\gamma')x+\beta\beta'x^2\right\}y = 0.$$

Mit Rücksicht auf die zwischen den α, α' u. s. w. bestehende Relation läßt sich diese Gleichung in die einfachere Form bringen:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right\}\frac{dy}{dx} + \left\{\frac{-\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right\}\frac{y}{x(x-1)} = 0$$

<u>Als neue Definition der hypergeometrischen Function ergibt sich jetzt die, daß wir als hypergeometrische Function irgend ein particuläres Integral der vorstehenden Differentialgleichung bezeichnen.</u> [Fr. d. 27. Oct. 93]

Ad 3): Wir wollen heute zusehen, wieso bei Euler die hypergeometrische Function als bestimmtes Integral auftritt.

Es kommt hier Kap. X des schon genannten zweiten Bandes der Integralrechnung in Betracht, insbesondere pag. 287. ff. Dies Kapitel ist überschrieben: De constructione aequationum ... differentialium per quadruturas curvarum.

Es wird behauptet, daß das bestimmte Integral:

$$f(x) = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\,du$$

als Function des Parameters x betrachtet eine hyper-

geometrische Function ist, d. h. sowohl der hypergeometrischen Differentialgleichung genügt, als auch sich durch die hypergeometrische Reihe darstellen läßt.

Die Auffassung eines bestimmten Integrals als Function eines Parameters ist leicht zu verstehen:

Denkt man sich die Integrations-variable als Abscisse, den Integranden selbst als Ordinate eines Punktes, so stellt der Integrand offenbar eine gewisse zwischen den Abscissen 0 und 1 verlaufende Curve dar, welche z. B. wenn $b > 1$ und $(c-b) > 1$ ist durch die Punkte $u = 0$ und $u = 1$ hindurchgeht, wie in nebenstehender Zeichnung:

Das Integral bedeutet dann offenbar den Flächeninhalt der schraffirten Figur. Ändert man nun den Parameter x, so ändert sich die Curve, und also auch der von ihr und der Abscissenaxe begrängte Flächeninhalt; letzterer ist also eine Funktion von x. Man kann diese Function von x für jeden geeigneten Wert von x leicht durch mechanische Quadratur mit beliebiger Annäherung berechnen. Wir wiederholen ausdrücklich:

Die Darstellung einer Function von x durch ein bestimmtes Integral ist auch für die numerische.

Berechnung unmittelbar zweckmäßig, insofern man zur Auswertung des Integrals die Methode der mechanischen Quadratur verwenden kann.

Die Definition durch ein bestimmtes Integral hat natürlich nur dann Sinn, wenn das Integral überhaupt einen endlichen Wert hat, d. h. wir müssen in unserm Falle die Bedingungen stellen:

$$b > 0, \quad c - b > 0,$$

wozu wir noch die Bedingung:

$$x < 1$$

fügen wollen, wodurch auch ein Unendlichwerden des Faktors $(1-xu)^{-a}$ im Intervall ein für allemal ausgeschlossen ist.

Wir zeigen nun, daß unser Integral als Function von x in der That der hypergeometrischen Differentialgleichung genügt. Es ist:

$$f = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\,du,$$

$$\frac{df}{dx} = a\int_0^1 u^{b}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a-1}\,du,$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = a(a+1)\int_0^1 u^{b+1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a-2}\,du.$$

Setzen wir

$$\Phi = u^{b}(1-u)^{c-b}(1-xu)^{-a-1};$$

so ist

$$\frac{d\Phi}{du} = u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a-2}\left\{b(1-u)(1-xu)+(b-c)u(1-xu)+(a+1)xu(1-u)\right\}.$$

Statt des Klammerausdruckes kann man setzen:

$$b(1-xu)^2+(-c+(a+b+1)x)u(1-xu)+(a+1)x(x-1)u^2$$

und also:

$$a.\frac{d\Phi}{du} = ab.u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}+(-c+(a+b+1)x).a.u^b(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a-1}+$$
$$x(x-1).a(a+1)u^{b+1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a-2}.$$

Bedenken wir nun, dass

$$\int_0^1 \frac{d\Phi}{du}.du = \Phi(u=1)-\Phi(u=0) = 0$$

ist, so gewinnt man

$$\int_0^1 a\frac{d\Phi}{du}du = x(x-1).\frac{d^2f}{dx^2}+(-c+(a+b+1)x)\frac{df}{dx}+ab.f=0,$$

was zu beweisen war.

<u>Das Integral f aufgefasst als Function von x ist in der That eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung.</u>

Zweitens ist zu zeigen, dass das Integral f sich in eine nach Potenzen des Parameters x fortschreitende Potenzreihe entwickeln läßt, welche im Wesentlichen mit der hypergeometrischen Reihe übereinstimmt.

Ist $|x|<1$, so ist wegen $0 \leqq u \leqq 1$

$$(1-xu)^{-a} = 1+\frac{a}{1}.xu+\frac{a(a+1)}{1\cdot 2}.x^2u^2+\frac{a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3u^3+\ldots$$

$$f = \int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1} du + \frac{a}{1} \cdot x \int_0^1 u^b (1-u)^{c-b-1} du + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} x^2 \int_0^1 u^{b+1} (1-u)^{c-b-1} du + \dots$$

Die einzelnen hier auftretenden Integrale sind nun aber gerade sogenannte „Eulersche Integrale der ersten Gattung," nämlich der Reihe nach:

$B(b, c-b)$, $B(b+1, c-b)$, $B(b+2, c-b)$ u. s. w.,

so daß also

$$f = B(b, c-b) + \frac{a}{1} x B(b+1, c-b) + \frac{a(a+1)}{1 \cdot 2} x^2 B(b+2, c-b) + \dots$$

ist.

Nun ist aber bekanntlich, wie man leicht durch partielle Integration nachweist, die Functionalgleichung gültig

$$B(b+1, c-b) = \frac{b}{c} B(b, c-b)$$

und entsp. $B(b+2, c-b) = \frac{b+1}{c+1} B(b+1, c-b) = \frac{b(b+1)}{c(c+1)} B(b, c-b)$

$$B(b+3, c-b) = \frac{b+2}{c+2} B(b+2, c-b) = \frac{b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} B(b, c-b)$$

u. s. w.

Setzt man diese Werte ein, so resultirt durch Absonderung des ersten Gliedes die Entwicklung:

$$f = B(b, c-b) \left\{ 1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2) \cdot b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots \right\}$$

d. h. die hypergeometrische Reihe, multiplicirt mit einem gewissen von den Constanten abhängigen Faktor:

Das bestimmte Integral f ist unter den Bedingungen:

$b > 0 \quad c - b > 0 \quad |x| < 1$

gleich der hypergeometrischen Reihe $F(a, b, c; x)$ multiplicirt mit einem Factor, der von x nicht mehr abhängt.

Gerade auf diesen Factor werden wir aber später noch besonderen Wert zu legen haben. Denn

weiterhin werden wir die hypergeometrische Function nicht nur als eine Function von x studiren, sondern auch als Function von a, b, c. Dann wird es aber nützlich sein, sich die Reihe F jedesmal mit dem Factor B behaftet zu denken:

Dann ist nämlich die Abhängigkeit von den a, b, c eine bedeutend einfachere, als bei der ursprünglichen Reihe.

Damit schließen wir die erste Einleitung, in welcher wir zusahen, wie sich die drei erwähnten Gesichtspunkte schon bei Euler verfolgen lassen:

Wir werden nun in den nächsten Wochen zunächst die dreierlei Definitionen der Reihe nach im Einzelnen weiter besprechen, wobei wir allemal die historische Bezugnahme voranstellen:

I. Die hypergeometrische Reihe $F(a,b,c;x)$.

Hierzu ist vor allen Dingen die Arbeit von Gauß: Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1}x^2+\ldots$ zu nehmen, welche 1813 in den Göttinger „Commentationes recentiores" Bd II erschienen und in den Ges. Werken Bd. III abgedruckt ist. Diese Arbeit ist von Gauß selbst ausdrücklich als pars prior bezeichnet. Der zweite Theil ist jedoch nicht erschienen, sondern es haben sich nur in Gauß' Nachlaß Materialien zu demselben vorgefunden, welche in Bd. III Seite 207 ff. zusammengestellt sind, und den Titel tragen: „Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis."

Zunächst haben wir uns nur mit dem ersten Teil der Arbeit zu beschäftigen, in welchem von der unendlichen Reihe ausgegangen wird.

Zuerst stellt Gauß die Frage: unter welchen Bedingungen convergirt die Reihe? und beantwortet dieselbe nicht nur für reelle Werte der Variablen, sondern auch, – wenn auch nur beiläufig – für complexe Werte von x. Sein Resultat ist, daß für

$$|x|<1$$

die Reihe sicher convergirt, für

$$|x| > 1$$

dagegen sicher divergirt, während im Falle

$$|x| = 1$$

noch besondere Bedingungen gelten.*)

Hierin liegen zwei neue Ideen gegenüber der Euler'schen Periode, die eine, daß man überhaupt nach der Convergenz einer Reihe fragt, während man sich zu Eulers Zeiten darum nicht kümmert, und zweitens, daß auch complexe Werte der Variablen berücksichtigt werden. Gauß zielt mit beidem schon auf das hin, was wir heutzutage Functionentheorie nennen.

Wir wissen aus letzterer, daß jede Potenzreihe, wenn sie überhaupt für irgend welche Werte der Variablen convergirt, dies immer im Innern eines gewissen Kreises, des „Convergenzkreises" thut (Cauchy).

Gauß Resultat ist dies, daß der Convergenzkreis von F der um den Nullpunkt herumgelegte Einheitskreis ist.

*) Ausgenommen sind hier und bei den folgenden Convergenzbetrachtungen immer 2 triviale Fälle, daß nämlich entweder a oder b, oder aber c eine negative ganze Zahl ist. Im ersteren Falle haben wir es bei F mit einer endlichen Reihe zu thun, die als solche immer convergirt, im 2ten Falle mit einer Reihe, die ∞ große Glieder besitzt und daher sicher divergirt.

Von unserm modern-functionentheoretischen Standpunkt werden wir also sagen:

Die Reihe F gibt nur erst ein „Element" einer analytischen Function (im Weierstraß'schen Sinne). Es wird zu fragen sein, wie man die Function analytisch fortzusetzen hat und welche Eigenschaften der Function dann zu Tage treten. [Mo. d. 30. Od. 93]

Wir kommen in unserm Bericht über die Gauß'schen Entwickelungen heute zu den Sätzen über die „verwandten Functionen", insbesondere über die „benachbarten Functionen", von Gauß als „relationes inter functiones contiguas" bezeichnet.

Man versteht unter „benachbarten" Functionen F solche hypergeometrische Reihen, bei welchen sich eines der Elemente a, b, c um eine Einheit unterscheidet, die übrigen bezw. gleich sind; es gibt also 6 zu $F(a, b, c; x)$ benachbarte Functionen, nämlich

$$F(a \pm 1, b, c; x),\ F(a, b \pm 1, c; x),\ F(a, b, c \pm 1; x).$$

Bildet man zu den benachbarten Functionen wieder die benachbarten, so kann man von $F(a, b, c; x)$ offenbar bis zu jeder Function $F(a+k, b+l, c+m; x)$ gelangen, deren erste 3 Elemente sich bezw. nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Solche hypergeometrische Reihen, deren erste drei Elemente

bezw. nur um ganze Zahlen unterschieden sind, nennt man „verwandte" Functionen F.

Gauss zeigt nun die Gültigkeit folgenden Satzes:

Irgend drei verwandte Functionen sind immer durch eine identische lineare Relation verbunden:

$$A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 = 0$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x sind.

Als Beispiele führen wir eine der 15 Relationen zwischen benachbarten Functionen an

$$(b-a) F(a,b,c;x) + a F(a+1, b, c; x) - b F(a, b+1, c; x) = 0.$$

Die allgemeinen Relationen zwischen verwandten Functionen findet man, indem man die betreffenden Functionen durch eine Kette von Functionen verbindet, von deren immer eine mit zwei andern benachbart ist, und indem man aus den zwischen diesen bestehenden Gleichungen die Zwischenglieder eliminirt. Z. B. erhält man:

$$F(a, b+1, c+1; x) - F(a, b, c; x) = \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x F(a+1, b+1, c+2; x),$$

$$F(a+1, b, c+1; x) - F(a, b, c; x) = \frac{b(c+a)}{c(c+1)} x F(a+1, b+1, c+2; x),$$

von welchen Gleichungen die zweite aus der ersten durch Vertauschung von a und b hervorgeht, gemäss dem Umstande, dass $F(a,b,c,x)$ in a und b symmetrisch ist.

Die relationes inter f. contiguas sind ein Beispiel eines

algebraischen Functionaltheorems zwischen transcendenten Functionen.

Wir verstehen unter einem algebraischen Functionaltheorem einer transcendenten Function eine algebraische Gleichung, welcher solche Functionswerte genügen, deren Argumente selber algebraisch verknüpft sind.

Die Gauß'schen Relationen zwischen verwandten Functionen stellen für die Functionen F ein solches algebraisches Functionaltheorem dar.

Die eben besprochenen Relationen zwischen verwandten Functionen benutzt Gauß selbst nach drei Richtungen hin: Erstens zeigt Gauß daß die lineare Differentialgleichung für die Function F ein specieller Fall der Relationen zwischen verwandten Functionen ist.

Denn man rechnet leicht nach, daß

$$\frac{dF}{dx} = \frac{a.b}{c} F(a+1, b+1, c+1, x),$$

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{a(a+1).b(b+1)}{1.2.c(c+1)} . F(a+2, b+2, c+2, x)$$

ist, daß also $F, \frac{dF}{dx}, \frac{d^2F}{dx^2}$ verwandte Functionen sind, zwischen welchen eine lineare Identität mit rationalen Coefficienten besteht, eben die hypergeometrische

Differentialgleichung.

Zweitens leitet Gauß aus unsern Relationen eine Kettenbruchentwicklung für den Quotienten zweier F-Functionen her.

Man kann nämlich eine in der Umgebung der Stelle $x=0$ convergirende Potenzreihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$

in Gestalt eines Kettenbruches umsetzen, welcher ebenfalls in der Umgebung von $x=0$ convergirt:

$$\cfrac{A}{1+\cfrac{A_1 x}{1+\cfrac{A_2 x}{1+\cfrac{A_3 x}{\ddots}}}}$$

wobei in A_1 nur die Coefficienten A, B, in A_2 nur A, B, C, in A_3 nur $A\ B, C, D$ u. s. w. eingehen.

Von der Art des vorstehenden Kettenbruchs ist der von Gauß für den Quotienten aufgestellte Ausdruck, den wir als

Gauß' Kettenbruch

bezeichnen wollen.

Gauß schreibt

$$G(a,b,c,x) = \frac{F(a,b+1,c+1,x)}{F(a,b,c,x)} = \frac{1}{\dfrac{F(a,b,c,x)}{F(a,b+1,c+1,x)}}$$

Nun folgt aber aus der zweiten der auf Seite 15

angegebenen Relationen durch Division mit $F(a, b+1, c+1, x)$:

$$\frac{F(a, b, c, x)}{F(a, b+1, c+1, x)} = 1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x \cdot \frac{F(a+1, b+1, c+2, x)}{F(a, b+1, c+1, x)}$$

$$= 1 - \frac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)} x}{\frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a+1, b+1, c+2, x)}}.$$

Ferner aus der dritten der dortigen Relationen, wenn man darin für a, b, c bzw. $a, b+1, c+1$ setzt, auf dieselbe Weise:

$$\frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a+1, b+1, c+2, x)} = 1 - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} \cdot x \cdot \frac{F(a+1, b+2, c+3, x)}{F(a+1, b+1, c+2, x)}$$

Man hat also

$$G(a, b, c, x) = \frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a, b, c, x)} = \frac{1}{1 - \frac{a(c-b)}{c(c+1)} x \Big/ 1 - \frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)} x \cdot \frac{F(a+1, b+2, c+3, x)}{F(a+1, b+1, c+2, x)}}.$$

Nun kann man für $\frac{F(a+1, b+2, c+3, x)}{F(a+1, b+1, c+2, x)}$ einen gleichgestalteten Ausdruck finden, wie für $G(a, b, c, x)$, indem man einfach für a, b, c bezw. $a+1, b+1, c+2$ einsetzt.

Wiederholt man in dem F-Quotienten, der dann noch im letzten Nenner bleibt, dieselbe Operation, so gelangt man schließlich nach n-maliger Ausführung der geschilderten Schritte zu folgendem Kettenbruch:

$$\frac{F(a,b+1,c+1,x)}{F(a,b,c,x)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a(c-b)}{c(c+1)}x}{1-\cfrac{\frac{(b+1)(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}x}{1-\cfrac{\frac{(a+1)(c-b+1)}{(c+2)(c+3)}x}{1-\cfrac{\frac{(b+2)(c-a+2)}{(c+3)(c+4)}x}{\ddots\,1-\cfrac{\frac{(a+n-1)(c-b+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)}x}{1-\frac{(b+n)(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)}x\cdot\frac{F(a+n,b+n+1,c+2n+1,x)}{F(a+n,b+n,c+2n,x)}}}}}}}$$

Man kann sich, die Convergenz vorausgesetzt, diesen Kettenbruch entweder ins Unendliche fortgesetzt denken, oder um einen Näherungswert zu erhalten, etwa den letzten F-Quotienten durch 1 ersetzt denken. —

Gauß Kettenbruch bezieht sich im allgemeinen Fall auf den Quotienten zweier verwandten F-Functionen, nämlich auf $\frac{F(a,b+1,c+1,x)}{F(a,b,c,x)}$.

Setzt man aber $b=0$, so wird $F(a,b,c,x)=1$, und aus dem Quotienten wird eine F-Function selbst, deren zweites Element $b=1$ ist, und welche dann folgende Kettenbruchentwicklung besitzt:

$$F(a,1,c+1,x) = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{a}{c(c+1)}x}{1-\cfrac{\frac{1(c-a+1)}{(c+1)(c+2)}x}{1-\cfrac{\frac{(a+1)(c+1)}{(c+2)(c+3)}x}{1-\cfrac{\frac{2(c-a+2)}{(c+3)(c+4)}x}{\ddots\,1-\cfrac{\frac{(a+n-1)(c+n-1)}{(c+2n-2)(c+2n-1)}x}{1-\frac{n(c-a+n)}{(c+2n-1)(c+2n)}x\cdot\frac{F(a+n,n+1,c+2n+1,x)}{F(a+n,n,c+2n,x)}}}}}}}$$

Wir wollen dies den „speciellen Fall" von Gauß' Kettenbruchentwicklung nennen.

Gauß' Kettenbruch stellt im speciellen Falle eine besondere F-Reihe selbst dar.

Dieser Kettenbruch enthält, wie Gauß bemerkt, fasst alle Kettenbruchentwicklungen in sich, welche man früher studirt hatte.

Mit der Convergenz des Kettenbruchs dagegen hat sich Gauß nicht beschäftigt; das hat erst später Riemann bez. Heine und Thomé gethan. Auch wir müssen dies bis auf später aufschieben, wenn wir in den functionentheoretischen Character unserer Functionen tiefer eingedrungen sind.

Drittens dienen Gauß die relationes inter functiones contiguas zur Bestimmung des Wertes der Reihe F für $x=1$.

Wir wissen, daß die hypergeometrische Reihe für $|x|<1$ sicher convergirt, für $|x|>1$ sicher divergirt. Es ist nun die Frage, ob und unter welchen Bedingungen die Reihe für $x=1$ convergirt, und welchen geschlossenen Ausdruck durch niedere Functionen sie dann besitzen mag.

Gauß untersucht zu diesem Zwecke die Frage, nach der Convergenz irgend einer Reihe überhaupt näher.

Eine unendliche Reihe sei

$$1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

In unserm Falle ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}$$

welchen Ausdruck man nach fallenden Potenzen von n entwickeln kann:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a+b-c-1}{n} + \frac{(c-a)(c-b)-(a+b-c-1)}{n^2} + \ldots$$

[Di. d. 31. Oct. 93]

Gauß untersucht nun allgemein die Convergenz solcher Reihen, bei denen sich der Quotient zweier aufeinanderfolgenden Glieder in eine Potenzreihe nach fallenden Potenzen der Stellenzahl mit dem Anfangsgliede 1 entwickeln läßt.

Er findet durch Anwendung auf unsere Reihe, daß man die in folgender Tabelle zusammengestellten Fälle zu unterscheiden hat:

a, b, c reell; $x = 1$

Wenn $a+b-c > 1$,	werden die Coefficienten ∞ groß	wenn $a+b-c \geqq 0$, ist die Summe ∞ groß
" $a+b-c = 1$,	bleiben die Coefficienten endlich	
" $a+b-c < 1$,	werden die Coefficienten ∞ klein	wenn $a+b-c < 0$, ist die Summe endlich

Die Reihe convergirt also nur, wenn $a+b-c < 0$ ist; nur in diesem Falle kann man also von einem Werte

der Reihe für $x=1$ sprechen. Zur Berechnung dieses Wertes benutzt Gauß folgende Relation zwischen verwandten Functionen:

$$c[c-1-x(2c-a-b-1)]F(a,b,c,x)+(c-a)(c-b)x\cdot F(a,b,c+1,x)-$$
$$-c(c-1)(1-x)F(a,b,c-1,x)=0$$

Für $\lim x=1$ wird nun der Factor $(1-x)$ des letzten Gliedes $=0$. Daraus darf man jedoch noch nicht ohne weiteres schließen, daß das letzte Glied überhaupt verschwindet, denn, wenn $a+b-c<0$ ist, so ist $a+b-(c-1)$ erst <1, und es werden zwar die einzelnen Glieder der letzten F-Reihe unendlich klein, ohne daß doch die Reihe selbst einen endlichen Wert zu haben braucht. Aber Gauß zeigt nun, daß, selbst wenn $F(a,b,c-1,x)$ für $\lim x=1$ aufhört zu convergiren, daß dann trotzdem $(1-x)F$ für $\lim x=1$ verschwindet, wofern nur die Glieder der Reihe mit wachsendem n unendlich klein werden, was ja hier der Fall ist.

Das letzte Glied der linken Seite der obigen Gleichung wird für $x=1$ zu 0, trotzdem das dort befindliche F für $x=1$ nicht zu convergiren braucht, weil die Glieder in der Reihe für das betreffende F unendlich klein werden.

So bekommt man

wo:

$$c(c-a-b)\mathfrak{F}(a,b,c,1)=(c-a)(c-b)\mathfrak{F}(a,b,c+1,1),\ \text{d.h.}$$

$$\mathfrak{F}(a,b,c,1)=\frac{(c-a)(c-b)}{c(c-a-b)}\mathfrak{F}(a,b,c+1,1);$$

ferner $\mathfrak{F}(a,b,c+1,1)=\frac{(c-a+1)(c-b+1)}{(c+1)(c-a-b+1)}\cdot\mathfrak{F}(a,b,c+2,1),$

$$\mathfrak{F}(a,b,c+k-1,1)=\frac{(c-a+k-1)(c-b+k-1)}{(c+k-1)(c-a-b+k-1)}\cdot\mathfrak{F}(a,b,c+k,1),$$

hieraus durch successive Einsetzung:

$$\mathfrak{F}(a,b,c,1)=\frac{(c-a)(c-a+1)\cdots(c-a+k-1)\cdot(c-b)(c-b+1)\cdots(c-b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)\cdot(c-a-b)(c-a-b+1)\cdots(c-a-b+k-1)}\mathfrak{F}(a,b,c+k,1).$$

Nun gehe man zur Grenze für $k=\infty$ über, man sieht, daß

$$\lim_{k=\infty}\mathfrak{F}(a,b,c+k,1)=1$$

ist, und man hat also

$$\mathfrak{F}(a,b,c,1)=\lim_{k=\infty}\frac{(c-a)(c-a+1)\cdots(c-a+k-1)\cdot(c-b)(c-b+1)\cdots(c-b+k-1)}{c(c+1)\cdots(c+k-1)\cdot(c-a-b)(c-a-b+1)\cdots(c-a-b+k-1)}$$

Damit haben wir $\mathfrak{F}(a,b,c,1)$ durch ein unendliches Produkt ausgedrückt.

Wir können übrigens hierfür noch einen besonderen geschlossenen Ausdruck gewinnen mit Hülfe des „Euler'schen Integrals zweiter Gattung", der Legendre'schen Function $\Gamma(z)$, welche in Gauß' Bezeichnungsweise mit $\Pi(z-1)$ identisch ist, und welche für positive ganze Zahlen z mit der Facultät: $1.2.3\ldots(z-1)=(z-1)!$ übereinstimmt. Durch dieselbe drückt sich Faus, wie folgt:

$$F(a,b,c,1) = \frac{\Gamma(c)\cdot\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\cdot\Gamma(c-b)} = \frac{\Pi(c-1)\cdot\Pi(c-a-b-1)}{\Pi(c-a-1)\cdot\Pi(c-b-1)}$$

Wir können das erst später ausführlicher erläutern. Das unendliche Produkt, welches wir für $F(a,b,c,1)$ gefunden haben, läßt sich mit Hilfe des Zeichens $\Gamma(z)$ oder $\Pi(z)$, dessen Bedeutung wir erst später besprechen werden, in der angegebenen Form schreiben.

Wir wollen jetzt zu den Gauß'schen Convergenzkriterien einige weitere Bemerkungen vom Standpunkte der modernen Functionentheorie aus hinzufügen.

Wir wissen, daß eine Potenzentwicklung immer im Innern eines gewissen „Convergenzkreises," hier des Einheitskreises, convergirt, außerhalb desselben divergirt; man wird dann fragen, wie es mit der Convergenz steht, wenn x irgendwo auf dem Convergenzkreise selbst liegt.

Das ist der erste Mangel der Gauß'schen Entwicklung, daß wir nicht erfahren, wie sich die Reihe überhaupt auf dem Convergenzkreise verhält, sondern nur, wie sie sich an der Stelle 1 verhält.

Der zweite Mangel ist der, daß die Convergenz nur für reelle a, b, c untersucht wird, unter welchen Bedingungen convergirt die Reihe auf dem

Convergenzkreise, wenn die a, b, c complexe Werte haben? Ich wiederhole hierzu vorab die schon auf S. 14 gemachte Bemerkung.

Bei der ganzen Convergenzbetrachtung werden wir die Fälle, daß a, b, oder c ganze negative Zahlen sind, von vornherein von der Betrachtung ausschließen dürfen.

Die Frage nach der Convergenz bei complexen a, b, c, x hat nun Weierstraß 1854 beantwortet *).

Es bezeichne

$$R(a+b-c)$$

den reellen Teil der complexen Zahl $a+b-c$. Dann kann man die Weierstraß'schen Resultate in einer ganz entsprechenden Tabelle anordnen, wie die Gauß'schen:

a, b, c beliebig; $|x| = 1$

$R(a+b-c) > 1$	Coeff. werden ∞ groß	
$R(a+b-c) = 1$	Coeff. bleiben endlich	$R(a+b-c) \geq 0$: Convergenz auf dem ganzen Convergenzkreise mit Ausnahme von $x=1$
$R(a+b-c) < 1$	Coeff. werden ∞ klein	$R(a+b-c) < 0$: Convergenz auf dem ganzen Convergenzkreise einschließl. des Punktes $x=1$.

*) Vgl. in die Theorie der analyt. Functionen. Crelle's Journal Bd. 51. 1856, abgedruckt in „Abhandlungen aus der Functionentheorie" 1886, vergl. p. 215 u. p. 220 daselbst.

Man erkennt, wie sich hier die Gauß'schen Angaben einordnen.

Uebrigens sind diese selben Resultate auch in einer Arbeit von Scheibner: Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz. 1860 ausführlich abgeleitet.

Nun kann man dieselbe Sache auch von rein functionentheoretischen Ideen aus behandeln, ohne überhaupt das Gesetz der Coefficienten der Reihe zu kennen. Wir wollen in dieser Hinsicht eine von Riemann *) in seiner Arbeit gegebene Andeutung näher ausführen.

Das gefundene Resultat betr. das Verhalten der Reihe auf dem Convergenzkreise kann auch aus allgemein functionentheoretischen Principien abgeleitet werden, sofern nur der analytische Charakter der Function $\mathfrak{F}$ als bekannt vorausgesetzt wird.

Eine Potenzreihe mit complexen Coefficienten

$$\mathfrak{F}(x) = (\mathfrak{A}_0 + i\,\mathfrak{B}_0) + (\mathfrak{A}_1 + i\,\mathfrak{B}_1)\,x + (\mathfrak{A}_2 + i\,\mathfrak{B}_2)\,x^2 + \ldots$$

in welcher die Variable x den absoluten Wert 1, also die Gestalt

$$x = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

haben soll, trennen wir in ihren reellen und imaginären Teil:

$$\mathfrak{F}(x) = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 =$$

*) Ges. W. p. 77.

$$= \mathfrak{A}_0 + (\mathfrak{A}_1 \cos\varphi - \mathfrak{B}_1 \sin\varphi) + (\mathfrak{A}_2 \cos 2\varphi - \mathfrak{B}_2 \sin 2\varphi) + (\mathfrak{A}_3 \cos 3\varphi - \mathfrak{B}_3 \sin 3\varphi) + \cdots$$
$$+ i \left\{ \mathfrak{B}_0 + (\mathfrak{B}_1 \cos\varphi + \mathfrak{A}_1 \sin\varphi) + (\mathfrak{B}_2 \cos 2\varphi + \mathfrak{A}_2 \sin 2\varphi) + (\mathfrak{B}_3 \cos 3\varphi + \mathfrak{A}_3 \sin 3\varphi) + \cdots \right\}$$

Beides, der reelle, wie der imaginäre Bestandteil sind trigonometrische Reihen, sog. „Fourier'sche Reihen."

Man hat nun nur zu fragen: Convergiren diese Fourier'schen Reihen, oder nicht, sei es für alle Werte von φ, oder für gewisse Werte von φ?

Man verfolgt dazu folgendes allgemeine Princip: Man denke sich die betreffende Function $F(x)$ – ganz abgesehen von ihrer Reihendarstellung – bis über den Convergenzkreis oder doch wenigstens bis auf denselben analytisch fortgesetzt, so daß man weiß, welche Werte sie längs desselben annimmt – einerlei, ob diese dort durch die anfängliche Potenzreihe darstellbar sind oder nicht. Vermöge der Theorie der Fourier'schen Reihe kann man nun aus den so bekannten Werten der Function längs des Convergenzkreises beurteilen, ob dieselben, der reelle wie der imaginäre Teil für sich durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar sind. Hat man hierüber entschieden, dann kann man zeigen:

<u>Wenn man die reellen wie die imaginären Bestandteile der Functionswerte, wie sie sich für die Punkte des Convergenzkreises durch analytische Fort-</u>

setzung ergeben, überhaupt jeden durch eine Fourier'sche Reihe darstellen kann, dann fallen diese mit dem oben geschriebenen Grenzfalle der Potenzentwicklung für $|x| = 1$ zusammen; in demselben Maasse also wie unsere Fourier'schen Reihen convergiren, convergirt auch unsere Potenzentwicklung auf dem Convergenzkreise. [Do. d. 2. Nov. 93]

Diese hier geforderte analytische Fortsetzung der Function, das analytische Verhalten der Function in dem ganzen Gebiete der Variablen, werden wir aber erst später mit Hülfe der Differentialgleichung untersuchen können.

Wir geben daher vorderhand nur rein historisch das Verhalten der Function an, von welcher die hypergeometrische Reihe ein Element definirt:

Die vorliegende Function verhält sich mit Ausnahme des Punktes $x = \infty$ und des Punktes $x = 1$ in allen Punkten der Ebene, und also auch in allen Punkten auf dem Rande des Convergenzkreises mit Ausnahme des Punktes $x = 1$ holomorph, d.h. sie lässt sich in der Umgebung einer solchen Stelle a in eine nach ganzen positiven Potenzen von $x - a$ absteigende convergente Reihe entwickeln.

Bezeichnet $R(z)$ eine nach ganzen positiven

Potenzen der Größe z fortschreitende Reihe, deren erstes, constantes Glied von 0 verschieden ist, so ist also im Allgemeinen

$$F = \varphi(x-\alpha).$$

Ausgenommen ist auf der Grenze des Einheitskreises nur der Punkt $\alpha = 1$. Auch über das Verhalten der Function in diesem Punkte gebe ich ohne Beweis das Nötige an, um es erst später zu beweisen:

In der Umgebung der Stelle $x = 1$ hat unsere Function die folgende Gestalt:

$$F(x) = \varphi_1(x-1) + (x-1)^{c-a-b}\,\varphi_2(x-1).$$

Hier bedeuten φ_1 und φ_2 im Allgemeinen gewöhnliche Potenzreihen, welche nach ganzen positiven Potenzen von $(x-1)$ fortschreiten, und nur wenn $c-a-b$ eine ganze Zahl ist, treten in einer der beiden Reihen auch solche Glieder auf, welche mit $\log(x-1)$ multiplicirt sind, und zwar in φ_1, wenn $c-a-b \leqq 0$ ist, in φ_2, wenn $c-a-b \geqq 0$ ist.

In besonderen Fällen können auch bei ganzzahligen Werte von $c-a-b$ die logarithmischen Glieder in dem allgemeinen Integral der Differentialgleichung fehlen. Die Bedingung hierfür lautet:

wenn $c-a-b = +n > 0$ ist

$$a(a+1)\cdots(a+n-2)\cdot b(b+1)\cdots(b+n-2) = 0$$

wenn $c-a-b=-n<0$ ist:

$$(a-1)(a-2)\ldots(a-n)\cdot(b-1)(b-2)\ldots(b-n)=0.$$

D. h. die logarithmischen Glieder können nur dann im allgemeinen Integral wegfallen, wenn eine der Zahlen a oder b eine negative bezw. eine positive ganze Zahl ist.

Im ersten der beiden Fälle bricht aber die Reihe mit einer endlichen Gliederzahl ab, so daß wir den Fall, daß $c-a-b=+n$ ist, und die logarithmischen Glieder wegfallen, nicht mehr weiter zu berücksichtigen brauchen. Denn wir hatten diesen Fall ausdrücklich von der Convergenzuntersuchung ausgeschlossen.

Wenn $c-a-b=0$ ist, so müssen notwendig logarithmische Glieder auftreten; man kann dieselben dann beliebig zu $\mathfrak{K}_1$ oder $\mathfrak{K}_2$ rechnen, da in dem Ausdruck:

$$\mathfrak{F}(x)=\mathfrak{K}_1(x-a)+\mathfrak{K}_2(x-a);$$

in den sich der allgemeine Ausdruck für $c-a-b=0$ verwandelt, der Unterschied zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ offenbar verwischt ist.

Was folgt nun aus den gemachten Angaben für die Endlichkeit der Function in dem Punkte $x=1$?

Um nicht zu schwierige Fallunterscheidungen machen zu müssen, sei im Folgenden wieder vorausgesetzt, daß die Größen a, b, c reell seien.

Man sieht nun leicht:

Wenn $c-a-b<0$ ist, so wird $(x-1)^{c-a-b}F_c(x-1)$ an der Stelle $x=1$ unendlich, außerdem ist es daselbst verzweigt, für gebrochene Werte von $c-a-b$ wie $(x-1)^{c-a-b}$, für ganzzahlige Werte von $c-a-b$ im allgemeinen Falle wie $\log.(x-1)$ — nur in dem Ausnahmefall der vorigen Seite ist $x=1$ eine unverzweigte Unendlichkeitsstelle —.

Wenn $c-a-b=0$ ist, so wird das Integral bei $x=1$ logarithmisch unendlich und ist natürlich ebendaselbst verzweigt.

Wenn $c-a-b>0$ ist, so ist die Function bei $x=1$ immer endlich, denn auch im Falle des Auftretens von logarithmischen Gliedern wird deren Unendlichwerden immer durch das Verschwinden von $(x-1)^{c-a-b}$ compensirt. Jedoch ist die Function bei $x=1$ immer verzweigt, bei gebrochenen Werte von $c-a-b$ wie $(x-1)^{c-a-b}$, bei ganzzahligen wie $(x-1)^{c-a-b}\log.(x-1)$, außer dem Ausnahmefalle der vorigen Seite, in dem die Reihe mit einem endlichen Gliedergahl abbricht, den wir desiderll von vornherein bei Seite gelassen haben.

Wir stellen das Resultat also folgendermaßen zusammen:

a, b, c reell

1) $c-a-b \lesseqgtr 0$ Function bei $x=1$ unendlich u. verzweigt wie $(x-1)^{c-a-b}$ bezw. wie $\log(x-1)$. (Unverzw. im Ausnahmefall)

2.) $c-a-b>0$ Function bei $x=1$ endlich und verzweigt.

(Unverzw. die endlichen Reihen.)

Es gilt nun in der Functionentheorie der allgemeine Satz über die Convergenz von Potenzreihen, dass die Entwicklung nach steigenden Potenzen in der Umgebung irgend eines Punktes immer innerhalb eines Kreises convergirt, welcher sein Centrum in dem betreffenden Punkte hat und durch den nächsten singulären – Unendlichkeits- oder Verzweigungs-– Punkt geht.

Wenden wir diesen Satz an, so folgt für unsere Reihe sofort a priori:

Weil $x=1$ in allen Fällen ein singulärer Punkt ist und andererseits der nächste an $x=0$ gelegene singuläre Punkt, so ergibt sich mit Nothwendigkeit dass der Convergenzkreis unserer Reihe der um 0 gelegte Einheitskreis ist.

Dabei ist freilich vorausgesetzt, dass die durch die Reihe definirte Function sich bei $x=1$ wie ein allgemeines Integral der Differentialgleichung verhält.

Diese Bedingung ist aber, wie ich hier nur historisch anführe, in der That erfüllt, außer wenn a oder b 0 oder eine negative ganze Zahl ist, welcher Fall ja von vornherein ausgeschlossen wurde.

Betrachten wir nun den reellen bezw. imaginären Teil der Function längs des Einheitskreises. Wir denken um der Anschaulichkeit halber in jedem Punkte der Kreislinie den Wert der Function — des reellen oder des imaginären Teils — als eine Linie senkrecht zur Zeichenebene aufgetragen; denken uns dann den so entstandenen Cylinder bei $x=-1$ aufgeschnitten und in der Zeichenebene ausgebreitet.

Es wird dann eine von der auseinandergerollten Kreislinie und einer gewissen Curve begrenzte Fläche entstehen,

welche für $c-a-b \leqq 0$ an der Stelle $x=1$ etwa wie die gezeichnete Figur sich ins Unendliche erhebt, für $c-a-b>0$ aber ganz im Endlichen bleibt.

Die Curve stellt uns graphisch etwa den reellen Teil der Function als reelle Function des Winkels φ dar.

Wann kann nun eine reelle Function einer reellen Veränderlichen durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden? Diese Frage hat Dirichlet in seiner berühmten Abhandlung in Crelle's Journal Bd. IV. 1829 zuerst eingehender untersucht. Wir entnehmen seiner Untersuchung *):

*) Vergl. auch die Abhandlung über die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen u. s. f. Crelle 17, 1837.

Die Fourier'sche Reihe stellt eine vorgegebene analytische Function dar, sobald entweder die Function durchaus endliche Functionswerte hat, oder doch nur so unendlich wird, daß sie integrirbar bleibt, daß die Curve also einen endlichen Flächeninhalt begrenzt.

Auf unsere Function angewandt ergibt das:
Im Falle 2), wo $c-a-b > 0$ ist, und die Funktion bei $x=1$ endlich bleibt, ist gewiß eine Fourier'sche Reihe zu finden, welche überall convergirt und die Werte der Function darstellt.

Im Falle 1), wo $c-a-b \leqq 0$ ist, wird die Function bei $x=1$ unendlich. Man hat dann zu unterscheiden, ob sie in noch integrirbarer Weise unendlich wird oder nicht, also

α) $c-a-b > -1$: Die Function ist integrirbar, die Fourier'sche Reihe convergirt, jetzt natürlich mit Ausnahme der Stelle $x=1$.

β) $c-a-b = -1$. Die Function ist nicht integrirbar, die trigonometrische Reihe also unbrauchbar.

Bei unserer Function liegt ein integrirbares Unendlich vor, sobald $c-a-b > -1$ ist, sobald aber $c-a-b \leqq -1$ ist, liegt ein nicht integrirbares Unendlich vor und die Fourier'sche Reihe ist unbrauchbar.

Auf solche Weise bestätigt die Lehre von der Fourier'schen Reihe genau das, was wir über die Convergenz der Reihe F auf dem Convergenzkreise mit Gauß durch directe Untersuchung des Coefficientengesetzes gefunden hatten *).

Damit schließen wir unsere Betrachtungen über die Convergenz der Reihe, und wollen nun zum Schlusse, bevor wir diesen Abschnitt verlassen und zum Studium der Differentialgleichung übergehen, einige Verallgemeinerungen der Gauß'schen Reihe besprechen.

Solcher Verallgemeinerungen gibt es, so viel ich sehe, in der Litteratur drei, welche wir kurz angeben wollen.

Nennen wir die bisher besprochene Reihe $F(a, b, c, x)$ die „gewöhnliche hypergeometrische Reihe", oder die „Gauß'sche Reihe" so nennen wir als erste Verallgemeinerung:

1.) Die höheren hypergeometrischen Reihen einer Veränderlichen, welche Thomae 1870 im 2. Bd. der Math. Ann. aufgestellt hat.

Diese Reihen haben folgende Gestalt:

$$F = 1 + \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{1 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdots c_{n-1}} x + \frac{a_1(a_1+1) \cdot a_2(a_2+1) \cdots a_n(a_n+1)}{1 \cdot 2 \cdot c_1(c_1+1) \cdot c_2(c_2+1) \cdots c_{n-1}(c_{n-1}+1)} x^2 + \ldots$$

---

*) Analog hätten sich für complexe a, b, c die Weierstraßschen Regeln ergeben.

und gehen für $n = 2$ in gewöhnliche hypergeometrische Reihen über.

Die so definirten allgemeineren Reihen besitzen, wie Thomae nachgewiesen hat, folgende den Sätzen über die Gauß'sche Reihe genau entsprechenden Eigenschaften:

1.) Der Convergenzkreis ist der Einheitskreis.

2.) Sie genügen einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung.

3.) Man kann die Reihe F in einfacher Weise als ein $(n-1)$faches bestimmtes Integral darstellen.

4.) Zwischen je $n+1$ „verwandten Reihen" besteht eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten. [Fr. d. 3 Nov.

Als zweite Verallgemeinerung der Gauß'schen Reihe bieten sich die Heine'schen Reihen dar, welche Heine in Bd. 32 u. 34 des Crelle'schen Journals (1846 u. 1847) gebildet und untersucht hat, und über welche er einen zusammenfassenden Bericht in seinem Buche über die Kugelfunctionen Bd. I. Seite 97 ff. (2. Aufl. 1878) erstattet.

Diese Reihen sind Functionen von 5 Argumenten, nämlich

$$\varphi(a, b, c, q, z) = 1 + \frac{(1-q^a)\cdot(1-q^b)}{(1-q)\cdot(1-q^c)}\, q^z +$$

$$+ \frac{(1-q^a)(1-q^{a+1})\cdot(1-q^b)(1-q^{b+1})}{(1-q)(1-q^2)\cdot(1-q^c)(1-q^{c+1})}\cdot q^{2z} + \cdots\cdots$$

Auch diese Reihen schließen die Gauß'sche Reihe als einen Grenzfall ein. Man hat, um die Gauß'sche Reihe zu erhalten, nur folgenden Grenzübergang zu machen:

$$q = 1+\varepsilon,\ z = \frac{1}{\varepsilon}\log x,\ \lim \varepsilon = 0.$$

Dann wird $q^{a-\nu} = (1+\varepsilon)^{a-\nu} = 1+(a+\nu)\varepsilon,\ 1-q^{a+\nu} = -(a+\nu)\varepsilon$,

ebenso $1-q^{b+\nu} = -(b+\nu)\varepsilon,\ 1-q^{\nu+1} = -(\nu+1)\varepsilon,\ 1-q^{c+\nu} = -(c+\nu)\varepsilon$.

Ferner wird $q^z = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}\cdot\log x} = \left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{\log x}$.

Nun ist aber $\lim\limits_{\varepsilon=0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$, also $\lim\limits_{\varepsilon=0} q^z = e^{\log x} = x$

Setzt man dies alles ein, so geht das allgemeine Glied der Reihe über in

$$\frac{a(a+1)\cdot\cdot(a+\nu)\cdot b(b+1)\cdot\cdot(b+\nu)}{1\cdot 2\cdot\cdot(\nu+1)\cdot c(c+1)\cdot\cdot(c+\nu)}\cdot x^{\nu+1},$$

die Reihe selbst also in

$$1+\frac{a\cdot b}{1\cdot c}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2+\cdot\cdot$$

d. h. in die Gauß'sche Reihe. Also ist der Satz bewiesen:

<u>Die Heine'sche Reihe schließt die Gauß'sche Reihe als einen Grenzfall ein.</u>

Im Übrigen mögen in Betreff des Verhältnisses der Heine'schen zu Gauß'schen Reihe noch folgende Andeutungen hier Platz finden:

Wir werden später noch mannigfache Beziehungen der hypergeometrischen Reihe zu den trigonometrischen

Functionen kennen lernen; ganz entsprechende Beziehungen besitzt nun die Heine'sche Reihe zu den elliptischen Functionen. Wir dürfen also sagen:

Heine erreicht durch seine Verallgemeinerung, daß die Beziehungen, welche die Gauß'sche Reihe zu den trigonometrischen Functionen hat, in entsprechender Weise als Beziehungen zur Theorie der elliptischen Functionen sich einstellen.

Ferner, wenn wir nach dem Analogon der hypergeometrischen Differentialgleichung fragen:

Die Heine'sche Reihe genügt in Bezug auf z nicht mehr einer Differentialgleichung, sondern einer Differenzengleichung, von der dann eben die hypergeometrische Differentialgleichung selbst wieder ein Grenzfall ist.

Die dritte Verallgemeinerung der Gauß'schen Reihe sind die Hypergeometrischen Reihen mit zwei Variablen x, y, welche zuerst Appell in den Comptes rendus 1880 angegeben hat, worauf Picard 1881 eine größere Abhandlung in den Annales de l'École Normale II. Serie. Bd. 12 folgen ließ. In dieser Arbeit zeigt Picard, daß die Appell'schen verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen sich, wie die Gauß'sche durch ein bestimmtes Integral in einfacher Weise ausdrücken, folgendermaßen:

Während die Gauß'sche Reihe abgesehen von einer gewissen Constanten dem Integrale

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}du$$

gleich ist, sind die Appell'schen Reihen im Wesentlichen durch ein Integral folgender allgemeinen Gestalt gegeben:

$$\int_0^1 u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(1-xu)^{\gamma}(1-yu)^{\delta}du.$$

Wenn man hierin den Integranden nach steigenden Potenzen von x und y entwickelt und dann gliedweise integrirt, gelangt man zu den Appell'schen Reihen, multiplicirt mit einer von x und y unabhängigen Größe.

Der hypergeometrischen Differentialgleichung entspricht hier ein System linearer partieller Differentialgleichungen nach den unabhängigen Variablen x, y.

Als bestimmte Integrale, wenn auch noch nicht als Reihen, hat die vorliegenden Functionen übrigens Pochhammer schon 1870 in Crelle's Journ. Bd. 71 in modern-functionentheoretischem Sinne untersucht und bereits (bei n Variablen $x, y, z, \ldots$) „Hypergeometrische Functionen $n$ter Ordnung" genannt; nur hat er nicht gerade die Reihen in den Vordergrund

gestellt, auch eigentlich nur x als Variable angesehen.

Ueber alle diese Fragen hat auch Goursat gearbeitet, vergl. insbesondere Annales de l'Ecole Normale II série, t. 12. 1883.

Soviel zur Orientirung über die bekannten Verallgemeinerungen der Gauß'schen Reihe. Damit schließen wir überhaupt den Bericht über die hypergeometrische Reihe und besprechen nun

II. Die Hypergeometrische Differentialgleichung.

Wie wir gesehen haben, tritt die hypergeometrische Differentialgleichung bereits bei Euler sowie bei Gauß auf, dagegen zum Mittelpunkt der Betrachtung macht sie zuerst Kummer in Bd. 15 v. Crelle's Journal 1836. Diese Kummer'sche Arbeit bildet die Grundlage der von der Differentialgleichung ausgehenden Behandlung der hypergeometrischen Function.

Obwohl damals Kummer noch nicht principiell den complexen Variablen seine Aufmerksamkeit widmet, so wollen wir doch in unserem Berichte uns von vornherein auf den Standpunkt der neueren Functionentheorie stellen, und werden daher gleich auch einiges bringen, was erst durch Riemann gefunden worden ist.

Ferner wollen wir uns von vornherein mit der

allgemeinen hypergeometrischen Differentialgleichung beschäftigen, die wir auf S. 7 kennen gelernt haben, nämlich

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\beta-\beta'}{x-1}\right) y' + \left(-\frac{\alpha\alpha'}{x} + \frac{\beta\beta'}{x-1} + \gamma\gamma'\right) \cdot \frac{y}{x(x-1)} = 0$$

wenn y', y'' in bekannter Weise die erste und zweite Ableitung von y nach x bedeuten.

In der Behandlung der Differentialgleichungen kann man zweierlei wesentlich entgegengesetzte Betrachtungsweisen unterscheiden, nämlich einen veralteten, antiquirten Standpunkt, der aber in älteren Lehrbüchern der Differentialrechnung noch vielfach eingenommen wird und den modernen functionentheoretischen Standpunkt.

Der elementare Standpunkt läßt sich etwa folgendermaßen charakterisiren:

1.) Man zweifelt nicht daran, daß es Functionen gibt, welche der Differentialgleichung Genüge leisten.

2.) Hat man zwei particuläre Lösungen y_1, y_2 gefunden, so sagt man, daß die allgemeine Lösung die Gestalt $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ haben muß, weil diese Form, welche die Differentialgleichung ebenfalls befriedigt, zwei „willkürliche" Constante enthält.

3.) Man sucht y_1 und y_2 durch elementare Functionen auszudrücken; gelingt dies nicht, so sagt man, die

Differentialgleichung sei nicht integrirbar, und beschäftigt sich nicht mehr mit ihr.

Auf diesem Standpunkte ist die Auflösung einer Differentialgleichung lediglich Sache der Routine und der Uebung in der Anwendung gewisser Kunstgriffe.

Ganz anders ist die Betrachtungsweise der modernen Theorie. Man verlangt da folgendes:

1.) Beweis für die Existenz von Functionen $c_1 y_1 + c_2 y_2$, welche der Differentialgleichung genügen.

2.) Erforschung der Eigenschaften dieser Functionen.

Man sieht eben die Differentialgleichung als Definition einer neuen Gattung transcendenter Functionen an. Bei der von dieser Definition ausgehenden Untersuchung der Eigenschaften derselben muß sich als Nebenresultat ergeben, wann sich die neuen Functionen auf schon früher bekannte Functionen, insbesondere auf elementare Functionen reduciren.

Das Hauptinteresse ruht aber hier nicht auf den Specialfällen der niederen Functionen, sondern gerade auf dem allgemeinen Fall, den neuen Functionen.

Unter Functionentheorie versteht man heutzutage fast ausschließlich die Theorie der analytischen Functionen complexer Veränderlicher. Diese sind

dann — mit Ausnahme einzelner Punkte oder Linien — immer stetig und besitzen Differentialquotienten jeder Ordnung und gestatten in Uebereinstimmung hiermit Entwicklung in eine Potenzreihe.

Beschränkt man sich aber auf reelle Functionen reeller Argumente, ohne die Ausdehnbarkeit auf complexe Argumente zu verlangen, so gelangt man zu viel allgemeineren Functionen, welche z. B. nicht mehr in irgend einem endlichen Intervall stetig zu sein brauchen, welche keine Differentialquotienten zu besitzen brauchen, und welche daher der Untersuchung viel größere Schwierigkeiten bieten. Z. B. die Theorie der allgemeinen durch eine Fourier'sche Reihe darstellbaren Functionen gehört hierher. In dieser Richtung ist besonders das Buch von Dini bemerkenswert. Wir sprechen also folgenden Satz aus.

An sich besteht gar keine Notwendigkeit functionentheoretische Untersuchungen in der Weise zu führen, daß man alle vorkommenden Größen als complexe Veränderliche auffaßt, vielmehr treten gewisse Feinheiten und Schwierigkeiten erst hervor, wenn man sich mit reellen Functionen reeller Veränderlichen beschäftigt, insofern dann, da der Functionsbegriff allgemeiner ist als sonst, die Functionen nicht notwendig analytische Functionen zu sein

brauchen, die sich nach dem Taylor'schen Lehrsatz in Potenzreihen entwickeln lassen.

In diese Theorie der reellen Funktionen reeller Variabler gehören dann beispielsweise Dirichlets Untersuchungen über die Fourier'sche Reihe, bei welcher die darzustellenden Functionen nicht notwendig analytisch zu sein brauchen.

In dieser Vorlesung will ich mich übrigens durchweg auf analytische Functionen complexer Variabler beschränken. Wir werden daher die Aufgabe specieller so stellen:

1.) Wir verlangen einen Existenzbeweis analytischer Functionen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der complexen Variablen, welche der Differentialgleichung genügen.

2.) Dann werden wir die Eigenschaften dieser Functionen in der complexen Zahlenebene studiren.

In dieser Form ist das Problem zuerst von Cauchy gestellt, dem sich dann in Deutschland außer Riemann namentlich Weierstraß angeschlossen hat.

Wir werden also am Montag die Differentialgleichung an die Spitze stellen, und fragen, ob man ihr durch convergente Potenzreihen genügen kann und ob die so entstehenden allgemeinen Integrale in der Gestalt $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sich aufbauen.

[Ms. d. 6. Nov. 93]

Die hypergeometrische Differentialgleichung in ihrer allgemeinsten Form lautet, wie wir früher sahen:

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right) y' + \left(\frac{-\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right) : \frac{y}{x(x-1)} = 0.$$

Wir unterscheiden nun die Punkte der Ebene, welche die Werte der complexen Variablen x darstellt mit Bezug auf unsere Differentialgleichung in gewöhnliche und singuläre Punkte. Singulär nennen wir diejenigen Punkte, in welchen einer der Coefficienten unendlich wird, also die Punkte $x=0$ und $x=1$, außerdem aber auch den Punkt $x=\infty$. Dieser letztere tritt zwar in unserer Differentialgleichung nicht in derselben unmittelbar sichtbaren Weise als singulär hervor, wie die Punkte $x=0$ und $x=1$; die Gleichung ist aber auch nicht invariant geschrieben, es ist vielmehr in der Schreibweise der unendlich ferne Punkt bevorzugt. Um die wahre Natur desselben zu erkennen, muß man ihn erst durch irgend eine geeignete lineare Substitution ins Endliche transformiren. Wir wählen diese Substitution so, daß nicht zugleich einer der Punkte 0 und 1 ins Unendliche rückt, und seine Natur unkenntlich wird, sondern daß die Punkte $0, \infty, 1$ in drei endliche, übrigens willkürliche Punkte a, b, c übergehen; dieses leistet

folgende Substitution:

$$x = \frac{z-a}{z-b} \cdot \frac{c-b}{c-a}$$

oder umgekehrt

$$z = \frac{b(a-c)x - a(b-c)}{(a-c)x - (b-c)}.$$

Die Differentialgleichung nimmt dann folgende ganze symmetrische Gestalt an, welche zuerst von Papperitz in meinem Seminar ausgerechnet, und in Math. Ann. 25*) mitgeteilt worden ist:

$$0 = \frac{d^2y}{dz^2} + \left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}\right\}\frac{dy}{dz} + \left\{\frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-a)(b-c)}{z-a} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(b-c)}{z-c}\right\} \frac{y}{(z-a)(z-b)(z-c)}.$$

Man sieht aus dieser Gestalt unmittelbar, daß die Zahlen α, α' zu dem singulären Punkte a, β, β' zu b, γ, γ' zu c in genau denselben Beziehungen stehen. Setzt man $a = 0$, $\lim b = \infty$, $c = 1$, so geht die Gleichung wieder genau in die ursprüngliche über, welche also $0, \infty, 1$ als singuläre Punkte hat.

Von hier aus kommt man von selbst zu der Riemann'schen Bezeichnung:

$$y = \mathcal{P}\left|\begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right| = \mathcal{P}\left|\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array}\right|$$

*) Ueber verwandte s-Functionen. Math. Ann. 25. 1885

Die 6 Größen $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$, welche, wie von früher bekannt, der Bedingung:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

unterliegen, nennt man nach Riemann die „Exponenten der <u>P-Function</u>," und zwar α, α' die zu a begw. 0 gehörigen, β, β' die zu b begw. ∞, γ, γ' die zu c begw. 1 gehörigen Exponenten; der Sinn dieser Benennung wird bald hervortreten.

Die 3 singulären Punkte sind natürlich, wie aus der symmetrischen Gestalt der Gleichung folgt, ganz gleich berechtigt.

Wir achten nun zuerst auf einen nichtsingulären Punkt z_0 der Ebene, und sehen zu, ob sich eine in der Umgebung der Stelle z_0 convergente Potenzreihe

$$y = \sum_{r=0}^{r=\infty} A_r (z - z_0)^r$$

finden läßt, welche der Differentialgleichung genügt?

In der That werden wir eine solche finden, und zwar wird sich zeigen, daß die allgemeinste derartige Potenzreihe sich durch zwei specielle Potenzreihen y_1, y_2 in der Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ausdrücken lässt. Ferner werden wir finden, daß diese Potenzreihen in der Umgebung der Stelle z_0 wirklich convergiren, und daß der Convergenzkreis bis an den nächsten

der singulären Punkte reicht.

Den Beweis für diese Behauptungen, denselben, den zuerst Cauchy und Weierstraß für die Existenz der Lösungen beliebiger Differentialgleichungen gegeben haben, wollen wir hier um der principiellen Wichtigkeit solcher Existenz- und Convergenzbeweise willen in größerer Ausführlichkeit wiedergeben.*)

Die Differentialgleichung heiße allgemein

$$y'' = p\,y' + q\,y,$$

unter p, q irgend welche Functionen verstanden, welche an der Stelle $z = z_0$ sich nicht singulär verhalten.

Ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, können wir $z_0 = 0$ annehmen; man braucht ev. nur für $z - z_0$ eine neue Variable z zu setzen. Dann lassen sich sowohl p wie q in der Umgebung der Stelle 0 nach Potenzen mit ganzen positiven Exponenten entwickeln:

$$p = \sum_0^\infty B_r z^r, \qquad q = \sum_0^\infty C_r z^r,$$

wobei diese Entwicklungen beide innerhalb eines Kreises convergiren, der bis an die nächste Unendlichkeitsstelle von p bezw. q heranreicht.

Setzen wir nun, zunächst nur formell:

$$y = \sum_0^\infty A_r \cdot z^r$$

also $y' = \sum_1^\infty r A_r z^{r-1}$, $y'' = \sum_2^\infty r(r-1) A_r z^{r-2}$, sowie die Potenzreihen für p und q in die lineare Differential-

*) Vgl. auch Fuchs in Crelle's Journal, Bd. 66, 1866.

gleichung ein, so ergibt sich:

$$\sum_2^\infty r(r-1)\mathfrak{A}_r z^{r-2} = \sum_0^\infty \mathfrak{B}_r z^r \cdot \sum_1^\infty r\mathfrak{A}_r z^{r-1} + \sum_0^\infty \mathfrak{C}_r z^r \sum_0^\infty \mathfrak{A}_\nu z^\nu,$$

oder ausführlicher:

$$2\mathfrak{A}_2 + 6\mathfrak{A}_3 z + 12\mathfrak{A}_4 z^2 + \cdots = (\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 z + \mathfrak{B}_2 z^2 + \cdots)(\mathfrak{A}_1 + 2\mathfrak{A}_2 z + 3\mathfrak{A}_3 z^2 + \cdots)$$
$$+ (\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1 z + \mathfrak{C}_2 z^2 + \cdots)(\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{A}_2 z^2 + \cdots),$$

woraus sich durch Vergleichung der Coefficienten gleicher Potenzen von z die Recursionsformeln für die $\mathfrak{A}_r$ ergeben:

$$2\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_0\mathfrak{A}_0$$
$$6\mathfrak{A}_3 = 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_0\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_0$$
$$12\mathfrak{A}_4 = 3\mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_3 + 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_0\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_0$$
$$20\mathfrak{A}_5 = 4\mathfrak{B}_0\mathfrak{A}_4 + 3\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3 + 2\mathfrak{B}_2\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_3\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_0\mathfrak{A}_3 + \mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_0$$

u. s. w.

Vermittelst dieser Formeln berechnen sich $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4 \ldots$ eindeutig, sobald wir $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ willkürlich angenommen haben.

Man findet z. B.

$$\mathfrak{A}_2 = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}_0 \cdot \mathfrak{A}_1$$
$$\mathfrak{A}_3 = \tfrac{1}{6}(\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_1)\mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{6}(\mathfrak{B}_0^2 + \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}_0)\mathfrak{A}_1$$
$$\mathfrak{A}_4 = \tfrac{1}{12}(\mathfrak{B}_0^2\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_1 + 2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_0 + \mathfrak{C}_0^2 + 2\mathfrak{C}_2)\mathfrak{A}_0 + \tfrac{1}{24}(\mathfrak{B}_0^3 + 3\mathfrak{B}_0\mathfrak{B}_1 + 2\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0 + 2\mathfrak{B}_2 + 2\mathfrak{C}_1)\mathfrak{A}_1$$

u. s. w.

Man sieht, wie man auch leicht durch Schluß von n auf $n+1$ beweist, daß sich so sämmtliche Coefficienten $\mathfrak{A}_r$ als lineare homogene Functionen

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{L}_r \cdot \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{M}_r \mathfrak{A}_1$$

der zwei ersten ausdrücken, wobei $\mathfrak{L}_\nu$ und $\mathfrak{M}_\nu$ ganze rationale Functionen der $\nu-1$ ersten Coefficienten in den Entwicklungen von p und q, und zwar mit nur positiven Coefficienten sind.

Dabei ist diese Bestimmung der $\mathfrak{C}_{i\nu}$ immer möglich, da in jeder der Bestimmungsgleichungen der Coefficient von $\mathfrak{C}_\nu$ immer eine von 0 verschiedene numerische Constante ist.

Da sich, wie wir sahen, jeder einzelne Coefficient linear durch $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ ausdrückt, so können wir die ganze Reihe in einen mit $\mathfrak{C}_0$ und einen mit $\mathfrak{C}_1$ multiplicirten Teil spalten:

$$\mathfrak{F}(z) = \mathfrak{C}_0 \cdot \mathfrak{F}_0(z) + \mathfrak{C}_1 \mathfrak{F}_1(z)$$

welches Resultat wir, indem wir für $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ die Buchstaben c_1 und c_2 setzen, folgendermaßen in Worten aussprechen können:

Die allgemeine Reihe, welche wir hier finden, setzt sich in der Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ aus zwei particulären Reihen zusammen, dem Umstande entsprechend, daß die sämtlichen $\mathfrak{C}_\nu$ linear und homogen aus den willkürlich bleibenden $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1$ zusammengesetzt sind.

Die gefundenen Entwickelungen haben jedoch so lange nur formalen Charakter, bis wir nachweisen, daß sie convergiren, [illegible] wirkliche Functionen vorstellen.

Dies zeigen wir, indem wir die gefundene Potenzreihe mit einer andern Potenzreihe vergleichen, von welcher wir wissen, daß sie convergirt.

Wir beachten nämlich, daß die Coefficienten L_r und M_r der Reihen

$$y_1 = \sum_0^\infty L_r z^r \qquad y_2 = \sum_1^\infty M_r z^r$$

sich aus den Entwicklungscoefficienten B_r und C_r von p und q <u>als ganze Functionen mit positiven Coefficienten</u> zusammensetzen.

Setzen wir daher statt der Function $p; q$ andere, deren Entwicklungscoefficienten sämtlich positiv und nicht kleiner als die absoluten Werte der entsprechenden B_r, C_r sind, so erhalten wir für die A_r Werte, welche absolut genommen nicht kleiner sind, als die absoluten Werte der oben bestimmten A_r. Können wir nun von der Vergleichsreihe nachweisen, daß sie convergirt, so muß die Reihe $\Sigma A_r z^r$ ebenfalls convergiren, indem doch ihre Terme einzeln dem absoluten Betrage nach nicht größer sind, als die Terme einer absolut convergenten Reihe.

Dabei werden wir die an Stelle der p und q zu setzenden Functionen so einrichten, daß die resultirende Vergleichsreihe ein hinreichend einfaches Bildungsgesetz besitzt, um ihre Convergenz sofort erkennen

zu können.

Wir schildern unser Verfahren kurz in folgendem Satz: Wir werden die Convergenz der Reihe bei einer Differentialgleichung beweisen, deren B_ν, C_ν ihrem absoluten Betrage nach grösser oder gleich den gegebenen B_ν, C_ν sind, aber ein einfaches Bildungsgesetz verfolgen, vermöge dessen man die Reihenconvergenz sofort einsieht. Dann convergirt die Reihe für die vorgelegte Differentialgleichung notwendig um so mehr.

Es ist dies die „Methode der Reihenvergleichung", wohl zuerst von Cauchy ersonnen.

Den Coefficienten B_ν von z^ν in der Entwicklung der Function $p(z)$ können wir bekanntlich durch ein Integral

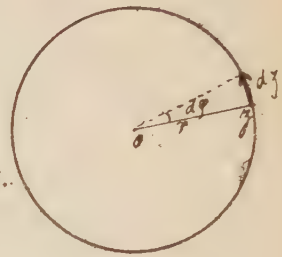
$$B_\nu = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{p(z)}{z^{\nu+1}} \cdot dz$$

ausdrücken, welches man längs einer geschlossenen den 0 Punkt, aber keinen singulären Punkt in positivem Sinne umlaufenden Curve zu erstrecken hat, z.B. längs eines Kreises mit dem Radius r.

Nun können wir mit Hilfe dieses Integrals leicht eine obere Grenze für den absoluten Wert von B_ν finden. Ein Integral kann man bekanntlich als den Grenzwert einer Summe ansehen;

nun ist der absolute Wert einer Summe nicht größer als die Summe der absoluten Werte der einzelnen Glieder, also

$$|\mathfrak{B}_r| \leqq \frac{1}{|2\pi i|} \int \frac{|p(z)|}{|z^{r+1}|} \, |dz| .$$



Nun ist:

$$|2\pi i| = 2\pi \qquad |z| = r \qquad |dz| = r \cdot d\varphi .$$

Also

$$|\mathfrak{B}_r| \leqq \frac{1}{r^r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int |p(z)| \cdot d\varphi .$$

Da nun der Integrationsweg durch keinen der singulären Punkte geht, so wird $|p(z)|$ längs desselben nirgends unendlich, besitzt also eine endliche obere Grenze $\mathfrak{M}$. Dann ist aber

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |p(z)| \, d\varphi \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{M} \, d\varphi = \mathfrak{M}$$

und es ist also

$$|\mathfrak{B}_r| \leqq \frac{\mathfrak{M}}{r^r} .$$

Bedeutet $\mathfrak{M}$ das Maximum, welches der absolute Betrag einer Function p auf der Peripherie des Kreises vom Radius r besitzt, so ist der absolute Betrag des $r$ten Coefficienten $\mathfrak{B}_r$ kleiner oder höchstens gleich $\frac{\mathfrak{M}}{r^r}$.

Dieser Kreis vom Radius r ist nur an die Bedingung gebunden, keinen singulären Punkt der

Function zu umschliessen oder zu erreichen (damit $\mathfrak{M}$ auf alle Fälle endlich bleibt).

Genau in derselben Weise findet man für die absoluten Werte der Coefficienten C_ν die obere Grenze

$$|C_\nu| \leqq \frac{\mathfrak{N}}{r^\nu}$$

unter $\mathfrak{N}$ die obere Grenze von $g(z)$ auf dem Kreise vom Radius r verstanden.

Wir setzen nun in unserer Differentialgleichung statt B_ν und C_ν unserm Plane gemäß die oberen Grenzen ihrer absoluten Werte, erhalten also

$$y'' = \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{M}}{r^\nu} z^\nu \cdot y' + \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{N}}{r^\nu} z^\nu \cdot y$$

oder, indem wir für die unendlichen Reihen die geschlossenen Ausdrücke einführen, denen sie gleich sind:

$$y'' = \frac{\mathfrak{M}}{1 - \frac{z}{r}} y' + \frac{\mathfrak{N}}{1 - \frac{z}{r}} y$$

oder

$$\left(1 - \frac{z}{r}\right) y'' = \mathfrak{M} y' + \mathfrak{N} y .$$

Bei dieser Hilfsdifferentialgleichung müssen wir nun nachweisen, daß sie sich in der Umgebung von $z = 0$ durch eine Potenzreihe von der bereits untersuchten Art integriren läßt. Dann wird die Reihe, welche wir für die ursprüngliche Differentialgleichung construirten, umsomehr convergiren.

[Di. d. 7. Nov. 93.]

In unserer Hilfsdifferentialgleichung setzen wir zur Vereinfachung derselben

$$\frac{z}{r} = x, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{1}{r} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy^2}{dz^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2}$$

und erhalten so

$$(1-x)\frac{dy^2}{dx^2} = Mr \frac{dy}{dx} + Nr^2 \cdot y,$$

worin wir für Mr, Nr^2 zwei neue Constanten P, Q einführen, so daß wir bekommen:

$$(1-x)\frac{dy^2}{dx^2} = P\frac{dy}{dx} + Q \cdot y.$$

Wir integriren diese Differentialgleichung formell durch die Reihe

$$\Sigma A'_r \cdot x^r$$

mit folgendem recurrenten Gesetz

$$r(r-1)A'_r - (r-1)(r-2)A'_{r-1} = P(r-1) \cdot A'_{r-1} + Q \cdot A'_{r-2}$$

oder

$$A'_r = \frac{r-2+P}{r} \cdot A'_{r-1} + \frac{Q}{r(r-1)} A'_{r-2}$$

Wir bilden uns nun den Quotienten zweier aufeinanderfolgenden Coefficienten

$$\frac{A'_r}{A'_{r-1}} = \frac{r-2+P}{r} + \frac{Q}{r(r-1)} \cdot \frac{A'_{r-2}}{A'_{r-1}}.$$

Für $\lim r = \infty$ verschwindet nun hierin das zweite Glied der Summe rechts, und das erste nähert sich der 1. Also ist

$$\lim_{r=\infty} \frac{A'_r}{A'_{r-1}} = 1.$$

Die Hilfsdifferentialgleichung wird durch eine Potenz-

reihe integrirt, bei welcher das Verhältniss zweier aufeinanderfolgenden Coefficienten bei wachsender Stellenzahl sich der Einheit unbegrenzt nähert.

Von hier aus ist selbstverständlich, dass unsere Reihe convergirt für $|x| < 1$.

D. h. die Hülfsdifferentialgleichung mit der unabhängigen Variablen z besitzt eine innerhalb des Kreises mit dem Radius r convergirende Potenzreihe als Lösung.

Mindestens innerhalb desselben Kreises muss also auch die Lösung

$$y = \sum_0^\infty A_\nu z^\nu$$

der ursprünglichen Differentialgleichung convergiren.

Da aber der Radius r des Convergenzkreises der Hülfsdifferentialgleichung nur der Bedingung unterworfen ist, keinen der singulären Punkte von $p(z)$ und $q(z)$ einzuschliessen oder zu erreichen, so kann ich r doch immer so wählen, dass der Convergenzkreis beliebig nahe an den nächsten singulären Punkt heranreicht, d. h.

Die gefundene Reihenentwicklung convergirt innerhalb eines bis an den nächsten singulären Punkt von $p(z)$ oder $q(z)$ heranreichenden Kreises eventuell mit Ausschluss des Randes.

Die Entwicklung $\Sigma A_\nu z^\nu$ kann man, wie für den 0-Punkt, so für jeden nicht singulären Punkt der z-Ebene durchführen; immer findet man convergente Potenzreihen, also wirkliche Functionen als Lösungen, und zwar enthalten diese immer zwei willkürliche Constanten.

Wir können also die für irgend einen Punkt z_0 gefundenen Lösungen überallhin in der z-Ebene fortsetzen, wenn wir nur die singulären Punkte vermeiden.

Unsere Differentialgleichung definirt eine zweifach unendliche Schaar analytischer Functionen $c_1 y_1 + c_2 y_2$, deren einzelne Zweige überall in der Ebene mit Ausnahme der singulären Punkte den Charakter einer ganzen Function haben.

Was die Convergenz der gefundenen Entwicklungen betrifft, so sahen wir schon, daß dieselbe mindestens innerhalb eines bis an den nächsten singulären Punkt heranreichenden Kreises convergirt. Dasselbe Resultat liefert die allgemeine Functionentheorie:

Nach allgemeinen Grundsätzen der Functionentheorie ist der Convergenzkreis der gestern von uns betrachteten Reihenentwicklungen notwendig durch

denjenigen um x_0 herumgelegten Kreis gegeben, der den nächstgelegenen singulären Punkt, also in unserem Falle 0 oder 1 auf seinem Rande enthält.

Die allgemeine Functionentheorie gibt aber auch zu einer weiteren Frage Anlaß. Man kann ja von irgend einem nichtsingulären Punkte z_0 aus einen anderen Punkt z auf verschiedene Weise durch analytische Fortsetzung erreichen, insbesondere kann man durch analytische Fortsetzung um einen singulären Punkt herum wieder zu z_0 zurückgelangen, d.h. einen singulären Punkt umkreisen.

Es entsteht also jetzt die Frage, wie sich unsere verschiedenen Functionszweige bei Umkreisung des einzelnen singulären Punktes verhalten mögen?

Ehe wir aber hierauf eingehen, untersuchen wir erst, wie sich die Lösungen in der Umgebung eines einzelnen singulären Punktes selbst verhalten. Dabei kehren wir insbesondere zur hypergeometrischen Differentialgleichung zurück.

Wir beschränken uns zuerst auf $x=0$, weil die

andern singulären Punkte genau entsprechende Resultate geben müssen.

Mit einer Potenzreihe $P(x)$ können wir aber unserer Differentialgleichung nicht genügen, wie wir sofort sehen; wir werden es mit der schon von Euler in solchen Fällen benutzten Entwicklung

$$y = x^{\rho} P(x)$$

versuchen, in welcher ρ nicht notwendig eine ganze Zahl zu sein braucht.

Wir ordnen uns zunächst die Coefficienten der gegebenen Differentialgleichung

$$y'' + y'\left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right) + \frac{y}{x(x-1)}\left(\frac{-\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right) = 0$$

nach Potenzen von x, so daß wir erhalten

$$0 = y'' + y'\left\{\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + (\gamma+\gamma'-1) + (\gamma+\gamma'-1)x + \dots\right\}$$

Setzen wir nun versuchsweise

$$y = x^{\rho} + A_1 x^{\rho+1} + A_2 x^{\rho+2} + \dots$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 = {} & x^{\rho-2}\left\{\rho(\rho-1) + (1-\alpha-\alpha')\rho + \alpha\alpha'\right\} \\
& + x^{\rho-1}\left\{A_1\left[(\rho+1)\cdot\rho + (1-\alpha-\alpha')\cdot(\rho+1) + \alpha\alpha'\right] + (\gamma+\gamma'-1)\rho \right. \\
& \qquad \left. + (\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma')\right\} \\
& + \dots\dots\dots\dots \\
& \vdots \\
& + x^{\rho+r-2}\left\{A_r\left[(\rho+r)(\rho+r-1) + (1-\alpha-\alpha')(\rho+r) + \alpha\alpha'\right] + A_{r-1}\left[\quad\right] + \dots\right\} \\
& + \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Durch Nullsetzen des ersten Coefficienten ergibt sich für den Exponenten ρ die quadratische Gleichung $\rho(\rho-1)+(1-\alpha-\alpha')\rho+\alpha\alpha'=0$

oder $(\rho-\alpha)(\rho-\alpha')=0$

welche man nach Fuchs die „determinirende Fundamentalgleichung, welche zu dem singulären Punkte gehört" nennt.

Des nähern sind in unserm Fall die Exponenten des Punktes $x=0$ die beiden Größen α, α' selbst, in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung, die wir für diese Größen mit Riemann gewählt hätten.

Man erhält also zwei particuläre Lösungen der Gestalt: $y_1 = x^{\alpha} P_1(x)$ $y_2 = x^{\alpha'} P_2(x)$

Wie steht's nun mit der Berechnung der Entwicklungscoefficienten A_ν?

Die folgenden Coefficienten A_ν bestimmen sich in der Weise, daß man den Coefficienten von $x^{\rho+\nu-2}$ gleich 0 setzt.

Gesetzt, es seien $A_1, A_2, \ldots A_{\nu-1}$ berechnet; dann ergibt die 0-Setzung des Coefficienten von $x^{\rho+\nu-2}$ für den Coefficienten A_ν von y_1, bezw. für den Coefficienten A'_ν von y_2 folgende Gleichungen:

$$0 = A_\nu((\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)-(1-\alpha-\alpha')(\alpha+\nu)+\alpha\alpha') + A_{\nu-1}(\quad)+\ldots\ldots$$

$$0 = A'_\nu((\alpha'+\nu)(\alpha'+\nu-1)-(1-\alpha-\alpha')(\alpha'+\nu)+\alpha\alpha') + A'_{\nu-1}(\quad)+\ldots\ldots$$

oder zusammengezogen

$$0 = A_\nu \cdot r(\alpha - \alpha' + \nu) + \ldots\ldots$$

$$0 = A'_\nu \cdot r(\alpha' - \alpha + \nu) + \ldots\ldots$$

Ist $\alpha - \alpha'$ keine ganze Zahl, dann sind diese Gleichungen sämtlich auflösbar und definiren uns zwei wesentlich verschiedene Lösungen, aus denen man also die allgemeine Lösung linear zusammensetzen kann.

Ist aber $\alpha = \alpha'$, so geben uns beide Gleichungssysteme nur dieselbe Lösung, unsere Methode enthält also dann eine Lücke, insofern sie nur eine der beiden zu verlangenden particulären Lösungen liefert.

Ist andererseits $\alpha - \alpha'$ eine positive oder negative ganze Zahl, etwa $\pm n$, dann wird entweder in dem zweiten oder in den ersten Gleichungssystem der Coefficient von A'_n, bezw. von A_n gleich Null, man würde also für A'_n resp. A_n einen ∞ großen Wert erhalten, (es sei denn, die n^{te} Gleichung nach Einsetzen der schon gefundenen Werte von $A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$ identisch erfüllt wäre.)

Diesen Fall des ∞ werdenden A'_ν oder A_ν kann aber nur für eine der beiden Entwickelungen eine

treten, für positive $\alpha-\alpha'$ für die zweite, bei negativen für die erste. diese eine Entwickelung wird dann illusorisch, während die andere eine wohl brauchbare Lösung liefert.

Unser Methode, deren allgemeine Geltung noch erst durch Convergenzbetrachtungen zu ergänzen ist, versagt, wenn die Differenz $\alpha-\alpha'=0$ oder = einer ganzen Zahl ist, indem dann jedesmal nur eine Potenzentwicklung in der Umgebung des singulären Punktes $x=0$ gefunden wird und die andere entweder nichts Neues gibt, oder versagt, weil die Coefficienten unendlich werden, es sei denn, daß der Ausnahmefall zweiter Ordnung vorliegt, wo nicht nur der Coefficient von A_ν verschwindet, sondern die ganze lineare Gleichung, aus welcher A_ν zu berechnen war, identisch erfüllt ist

d. 9. Nov. 93] Wir werden nun die einzelnen Fälle, zu denen wir so geführt werden, am passendsten in der Weise weiter discutiren, daß wir an unsere früheren Betrachtungen über die hypergeometrische Reihe anknüpfen.

Gegeben war die für $|x|<1$ sicher convergirende Reihe

$$F(a, b, c, x).$$

Es zeigte sich, daß diese Reihe einer gewissen Differentialgleichung 2. Ordnung genügt wir setzten nun

$$y = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma} F(a, b, c, x),$$

unter α, γ irgend zwei willkürliche Constanten verstanden, und fanden, daß die so definirte „allgemeine hypergeometrische Function" der Differentialgleichung

$$y'' + \left(\frac{1-\alpha-\alpha'}{x} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{x-1}\right) y' + \left(\frac{-\alpha\alpha'}{x} + \frac{\gamma\gamma'}{x-1} + \beta\beta'\right) \frac{y}{x(x-1)} = 0$$

genügt, wobei die Constanten $\alpha', \beta, \beta', \gamma'$ mit den a, b, c und den willkürlichen Zahlen α, γ durch die Gleichungen zusammenhängen

$$a = \beta + \alpha + \gamma$$
$$b = \beta' + \alpha + \gamma$$
$$c = 1 + \alpha - \alpha'$$

Wir haben nun nur die Betrachtung in umgekehrter Ordnung zu durchlaufen.

Wir gehen von der Differentialgleichung aus, und wissen also nun von vornherein, daß eine Lösung derselben in folgender Gestalt existirt.

$$x^{\alpha}(1-x)^{\gamma} F(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma,\ 1+\alpha-\alpha',\ x)$$

Dies ist nun in der That gerade die eine der gesuchten Particularlösungen, nämlich $x^{\alpha} \mathfrak{P}(x)$.

Zugleich erkennen wir, daß $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < 1$

convergirt, von besonderen Fällen abgesehen.

Man kann aber dieselbe Lösung auch in anderer Gestalt erhalten: Wir sehen, daß die Differentialgleichung ganz symmetrisch in γ und γ' ist; man kann diese Zahlen also miteinander vertauschen, und erhält also für dieselbe Particularlösung noch folgenden zweiten mit dem ersten ganz gleichwertigen Ausdruck

$$x^{\alpha}(1-x)^{\delta'}F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1+\alpha-\alpha', x).$$

Nun ist aber unsere Differentialgleichung auch in den Zahlen α und α' symmetrisch. Vertauschen wir also in unsern Lösungen α mit α', so muß man ebenfalls Particularlösungen bekommen, und zwar, wie man sieht, gerade die zweite, in der Gestalt $x^{\alpha'}K'(x)$ gesuchte Lösung.

Mit Hülfe der hypergeometrischen Reihen kann man die in der Umgebung der Nullstelle gesuchten beiden Entwicklungen $x^{\alpha}K(x)$ und $x^{\alpha'}K'(x)$ sofort explicit hinschreiben, und zwar jede noch in zwei verschiedenen Formen:

$$y_1 = x^{\alpha}K(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\delta}F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha', x) = x^{\alpha}(1-x)^{\delta}F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta+\gamma', 1+\alpha-\alpha', x)$$

$$y_2 = x^{\alpha'}K'(x) = x^{\alpha'}(1-x)^{\delta}F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta'+\gamma, 1+\alpha'-\alpha, x) = x^{\alpha'}(1-x)^{\delta}F(\alpha'+\beta-\gamma', \alpha'+\beta'+\gamma', 1+\alpha'-\alpha, x)$$

An diese explicit hingeschriebenen Entwicklungen knüpfen wir nun die Betrachtungen der vorigen Stunde

wieder an, nämlich, wenn sie convergiren und in wieweit sie unsere Aufgabe erledigen, und wenn nicht, was dann an ihre Stelle zu setzen ist.

Wir haben für diese Discussion drei Fälle zu unterscheiden, erstens den Fall, daß $\alpha-\alpha'$ weder 0 noch eine positive oder negative ganze Zahl ist, — diesen Fall nennen wir den „allgemeinen Fall" —, zweitens, daß $\alpha-\alpha'=0$ ist, und drittens, daß $\alpha-\alpha'$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl ist. Wir besprechen die Fälle nacheinander:

1.) $\alpha-\alpha'$ weder $=0$, noch eine ganze Zahl.

Im allgemeinen Falle sind beide Reihenentwicklungen vernünftig und von einander verschieden, und liefern in der Umgebung des 0-Punktes zwei linear unabhängige Particularlösungen der Differentialgleichung, und erledigen damit die Fragestellung.

Der Convergenzkreis ist, wie schon oben bemerkt, der Einheitskreis, der in der That bis an den nächsten singulären Punkt, nämlich $z=1$, heranreicht.

2.) $\alpha-\alpha'=0$

Im Falle $\alpha-\alpha'=0$ fallen unsere beiden Formelgruppen beider zusammen, und liefern nur eine Particularlösung. Da ist also eine zweite Particular-

lösung noch erst zu suchen.

3.) $\alpha - \alpha'$ eine von 0 verschiedene ganze Zahl.

Da es gleichgültig ist, welchen der beiden Exponenten bei 0 man α, welchen α' nennt, so wollen wir den kleineren α, den größeren α' nennen, so daß also $\alpha - \alpha'$ eine negative ganze Zahl wird, etwa

$$\alpha - \alpha' = -k.$$

Dann wird aber in den F-Reihen der ersten Formelgruppe das dritte Argument

$$1 + \alpha - \alpha' = 1 - k$$

0 oder eine negative ganze Zahl, dieselben werden also im allgemeinen durch Auftreten unendlich werdender Glieder illusorisch. Dagegen wird das dritte Argument in der zweiten Formelgruppe

$$1 + \alpha' - \alpha = 1 + k$$

eine positive ganze Zahl, die Reihen bleiben also wohl brauchbar. Wir können also den Satz aussprechen:

Wenn $\alpha - \alpha' = -k$ ist, so bleibt die Reihe mit $x^{\alpha'}$ vernünftig, die Reihe mit x^{α} aber verliert allgemein zu reden ihre Bedeutung, und wir haben also wieder nur eine Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung gewonnen.

Ausgenommen sind nur diejenigen Fälle „Ausnahmefälle zweiter Ordnung," bei denen der Zähler in den Coefficienten der hypergeometrischen Reihe rechtzeitig verschwindet, so daß das Illusorischwerden vermieden wird.

Wann treten nun diese Ausnahmefälle zweiter Ordnung auf? Wir beginnen die Untersuchung mit einer Vorbemerkung:

Wenn $a - a' = -k$ ist, so lauten unsere beiden formalen Entwicklungen, wenn man den Factor $(1-x)^\gamma$ heraussetzt, etwa so

$$x^a p(x) = (1-x)^\gamma (x^a + A_1 x^{a+1} + A_2 x^{a+2} + \dots),$$
$$x^{a'} p'(x) = (1-x)^\gamma (x^{a+k} + A_1' x^{a+k+1} + A_2 x^{a+k+2} + \dots)$$

Man sieht nun, daß die erste Entwicklung ihren Charakter nicht verliert, wenn man die zweite Entwicklung mit einer beliebigen Constanten multiplicirt hinzufügt:

$$x^a p(x) + c \cdot x^{a+k} p'(x).$$

Man kann dadurch dem Coefficienten A_k jeden beliebigen Wert geben, ebenso wie A_k ändern sich auch die höheren Coefficienten $A_{k+1}, A_{k+2} \dots$ mit der Wahl der Constanten c. Hat man aber einmal über den Wert von A_k eine bestimmte Festsetzung getroffen, so sind hiermit c und damit

auch alle weiteren Coefficienten bestimmt. Also sprechen wir den Satz aus:

Ist $\alpha - \alpha' = -k$, und es soll eine Lösung $x^{\alpha} P(x)$ existiren, so wird in der zugehörigen F-Reihe und ebenso in der Reihe $P(x)$ selbst der Coefficient von $x^{\alpha+k}$ unbestimmt bleiben müssen, und es werden die weiteren Coefficienten erst wieder bestimmt sein, wenn ich den Coefficienten von $x^{\alpha+k}$ mir erst irgendwie festlege.

Mit dieser Vorbemerkung gehen wir nunmehr an unsere Ausnahmefälle zweiter Ordnung heran.

Der Coefficient A_k würde formell lauten.

$$A_k = \frac{(\beta+\alpha+\gamma)(\beta+\alpha+\gamma+1)\cdots(\beta+\alpha+\gamma+k-1)\cdot(\beta'+\alpha+\gamma)(\beta'+\alpha+\gamma+1)\cdots(\beta'+\alpha+\gamma+k-1)}{1\cdot 2\cdots k\cdot(-k+1)(-k+2)\cdots(-k+k)},$$

A_k würde also im allgemeinen unendlich werden. Nun soll aber A_k unbestimmt werden, dies geschieht, wenn auch der Zähler verschwindet. Dann erscheint A_k in der Form $\frac{0}{0}$, und man kann ihm jeden beliebigen Wert beilegen, z.B. den Wert 0. Dann verschwinden aber auch alle weiteren Coefficienten, da sie alle A_k als Factor enthalten, und zwar z^k mit einer nicht unendlichen Größe multiplicirt. Also dürfen wir sagen:

Die Ausnahmefälle zweiter Ordnung sind

diejenigen Fälle, wo der Zähler in dem hingeschriebenen Ausdruck für A_k verschwindet, und wir dürfen dann den Coefficienten A_k, der dann in der Gestalt $\frac{0}{0}$ erscheint, unbeschadet der Allgemeinheit $= 0$ setzen und die ganze Reihe an dieser Stelle abbrechen.

Der Zähler verschwindet, wenn einer seiner Factoren verschwindet, also:

Die Ausnahmefälle zweiter Ordnung, bei denen die Formel $x^\alpha P(x)$ doch brauchbar bleibt und unsere Integrationsaufgabe durch die beiden hingeschriebenen Reihenentwickelungen erledigt ist, sind diejenigen Fälle $\alpha - \alpha' = -k$, bei denen

entweder $\beta + \alpha + \gamma + \nu = 0$

oder $\beta' + \alpha + \gamma + \nu = 0$

ist, unter ν eine ganze Zahl der Reihe $0, 1, 2, \ldots k-1$ verstanden.

Wir können diese Bedingung noch in anderer Weise schreiben, in der die Gleichberechtigung von γ mit γ' hervortritt.

Wir benutzen die Relation

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' - 1 = 0,$$

und ziehen die gefundenen Bedingungsgleichungen von dieser Identität ab. Man erhält

$$\beta' + \gamma' + \alpha' - \nu - 1 = 0,$$

bezw. $\beta + \gamma' + \alpha' - \nu - 1 = 0.$

Nun setzen wir für α' den Wert $\alpha + k$; und für $k - \nu - 1$ den Buchstaben ν', und bekommen so die Gleichungen

$$\beta' + \gamma' + \alpha + \nu' = 0,$$

bezw. $\beta + \gamma' + \alpha + \nu' = 0,$

worin ν' ebenfalls eine der Zahlen $0, 1, 2 \ldots k-1$ bedeutet.

Vergleichen wir diese neue Form der Bedingungsgleichungen mit der zuerst gefundenen, so sieht man, daß sie ganz entsprechende Form haben:

Das Kennzeichen der Ausnahmefälle zweiter Ordnung läßt sich auch so schreiben, daß man für γ γ' einführt und statt ν eine entsprechende Größe ν' setzt.

Nun können wir aus je zwei gleichbedeutenden Gleichungen noch α eliminieren, indem man etwa die Gleichung mit ν von der entsprechenden mit ν' abzieht. Setzt man dann für $\nu' - \nu = k - 1 - 2\nu$ den Buchstaben σ, der dann also eine der Zahlen $-k+1, -k+3, -k+5, \ldots + k-5, +k-3, +k-1$ bedeutet, so lautet die eine Gleichung

$$+(\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = \sigma$$

die andere $-(\beta - \beta') + (\gamma - \gamma') = \sigma.$

Offenbar kann ich aber auch alle Vorzeichen auf den linken Seiten dieser Gleichungen ohne Bedeutungsänderung umkehren, da ja σ dieselben positiven wie negativen Zahlen durchläuft. Man kommt dann zu folgender Formulirung der Bedingung für das Eintreten des Ausnahmefalls zweiter Ordnung:

In ganz symmetrischer Weise lassen sich die Ausnahmefälle zweiter Ordnung, wo $\alpha - \alpha' = -k$ ist, dadurch charakterisiren, daß einer der Ausdrücke $\pm(\beta-\beta') \pm (\gamma-\gamma') - \sigma$ (Vorzeichen von einander unabhängig!) in der Reihe der Zahlen $-(k-1), -(k-3), \ldots +(k-3), +(k-1)$ enthalten sein muß. (Es ist dann natürlich immer auch der entgegengesetzte Ausdruck in dieser Zahlenreihe vorhanden).

In dieser Form, doch mit einer ganz andern Methode der Herleitung ist die Bedingung wohl zuerst von Schwarz in der später noch eingehender zu besprechenden Arbeit „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Argumentes darstellt" (Crelle's Journal Bd. 75. 1872.) angegeben worden.*)

*) vergl. die allgemeine Regel bei Fuchs in Crelle 68, p. 376-77 (1868).

[Fr. d. 10. Nov. 95.]

Nachdem wir nun gesehen haben, in welchen Fällen durch unseren Ansatz $y_1 = x^\alpha \mathfrak{P}(x)$, $y_2 = x^{\alpha'} \mathfrak{P}(x)$ das Problem der Integration erledigt ist, ist es heute unsere Aufgabe auch in den noch übrigen Fällen, wo wir bisher nur erst ein particuläres Integral gefunden haben, auch noch ein zweites particuläres Integral aufzustellen.

Ich gebe der Kürze halber gleich die allgemeine Form dieses zweiten Integrals an

Sind α und $\alpha' \geqq \alpha$ die Wurzeln der determinirenden Gleichung, und ist $\alpha - \alpha' = -k$ oder $= 0$, so haben die beiden particulären Integrale die Gestalt

$$y_1 = x^\alpha \mathfrak{P}(x) + \log. x \cdot x^{\alpha'} \mathfrak{P}'(x).$$

$$y_2 = x^{\alpha'} \mathfrak{P}'(x).$$

Dabei ist y_2 das schon durch unseren früheren Ansatz gefundene particuläre Integral. Man sieht also:

In den Ausnahmefällen erster Ordnung enthält das eine Integral logarithmische Glieder.

Wir wollen uns nun nicht dabei aufhalten, a posteriori die Brauchbarkeit dieses allgemeinen Ansatzes zu verificiren, sondern wir wollen a priori durch einen Grenzübergang sehen, wie

der Ausnahmefall erster Ordnung aus dem allgemeinen Fall hervorgeht.

Wir setzen also, um zum Falle $\alpha' - \alpha = 0$ zu gelangen:

$$\alpha = \alpha' + \varepsilon$$

Dann lauten die beiden Integrale des bisherigen Ansatzes:

$$I = x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma} \cdot F(\beta+\alpha'+\gamma, \beta'+\alpha'+\gamma, 1-\varepsilon, x);$$

$$II = x^{\alpha'+\varepsilon}(1-x)^{\gamma} \cdot F(\beta+\alpha'+\gamma+\varepsilon, \beta'+\alpha'+\gamma+\varepsilon, 1+\varepsilon, x)$$

Statt aus I und II kann man das allgemeine Integral auch aus I und $\frac{1}{\varepsilon}(II-I)$ linear zusammensetzen. Die Combination $\frac{1}{\varepsilon}(II-I)$ ist es nun, welche für $\lim \varepsilon = 0$ das zweite Integral mit den logarithmischen Gliedern liefert. Man braucht sich nur an den Begriff der Differentiation zu erinnern, um den geforderten Grenzübergang auszuführen. Es ergibt sich

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{II-I}{\varepsilon}\right) = \left[\frac{d}{d\varepsilon}\left\{x^{\alpha'+\varepsilon}(1-x)^{\gamma} \cdot F(\beta+\alpha'+\gamma+\varepsilon, \beta'+\alpha'+\gamma+\varepsilon, 1+2\varepsilon, x)\right\}\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma}\left[\frac{d}{d\varepsilon} F(\beta+\alpha'+\gamma+\varepsilon, \beta'+\alpha'+\gamma+\varepsilon, 1+2\varepsilon, x)\right]_{\varepsilon=0}$$

$$+ \left[\frac{d(x^{\alpha'+\varepsilon})}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0}(1-x)^{\gamma} \cdot F(\beta+\alpha'+\gamma, \beta'+\alpha'+\gamma, 1, x)$$

Nun ist

$$\left[\frac{d(x^{\alpha'+\varepsilon})}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \left[x^{\alpha'+\varepsilon} \cdot \log x\right]_{\varepsilon=0} = x^{\alpha'} \log x.$$

also:

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\frac{II-I}{\varepsilon}\right) = x^{\alpha'}(1-x)^{\delta} f(x) + \log x \cdot x^{\alpha}(1-x)^{\delta} F(\beta+\alpha'+\gamma, \beta'+\alpha'+\gamma, 1, x).$$

Man sieht.

Das Glied mit $\log x$ stammt von dem Umstande her, daß bei dem Grenzübergang eine Potenz von x nach dem Exponenten differenzirt wird.

Nach demselben Princip, mit etwas mehr Complicirtheit, läßt sich der Fall $\alpha - \alpha' = -k$ behandeln.

Man setze $\alpha = \alpha' - k + \varepsilon$,

$$I' = x^{\alpha'}(1-x)^{\delta} F(\beta+\alpha'+\gamma, \beta'+\alpha'+\gamma, 1+k-\varepsilon, x)$$

$$II' = x^{\alpha'-k+\varepsilon}(1-x)^{\delta} F(\beta+\alpha'+\gamma-k+\varepsilon, \beta'+\alpha'+\gamma-k+\varepsilon, 1-k+\varepsilon, x)$$

Würden wir $\varepsilon = 0$ setzen, so würde die Reihe II' unendlich werden, da die Coefficienten von x^k und den höheren Potenzen von x unendlich würden, und zwar würde der Coefficient von x^k folgendermaßen lauten:

$$\frac{1}{m(k,\varepsilon)} = \frac{(\alpha'+\beta+\gamma-k+\varepsilon)(\alpha'+\beta+\gamma-k+\varepsilon+1)\cdots(\alpha'+\beta+\gamma+\varepsilon-1)\cdot(\alpha'+\beta'+\gamma-k+\varepsilon)(\alpha'+\beta'+\gamma-k+\varepsilon+1)\cdots(\alpha'+\beta'+\gamma+\varepsilon-1)}{1\cdot 2 \cdots k\cdot(1-k+\varepsilon)(2-k+\varepsilon)\cdots(\varepsilon-1)\cdot\varepsilon}$$

Die Reihe $m(k,\varepsilon)\,II'$ bleibt dann für $\lim \varepsilon = 0$ endlich und geht in die Reihe I' über. Wir bilden daher die Combination $\frac{m(k,\varepsilon)\cdot II' - I'}{\varepsilon}$ und gehen mit diesem Integral zur Grenze für $\lim \varepsilon = 0$ über. Wir unterdrücken das Detail der Ausrechnung und charakterisiren gleich das Resultat:

Die Lösung

$$II'' = \lim_{\varepsilon=0} \frac{m(k,\varepsilon)II' - I}{\varepsilon}$$

enthält dann in der That logarithmische Glieder entsprechend dem von vornherein in Aussicht gestellten Schema.

Schließlich führe ich noch rein historisch an, was ja selbstverständlich ist, daß alle diese Entwicklungen für $|x| < 1$ convergiren, ob auch für $|x| = 1$, darauf wollen wir nicht eingehen.

Wir können also nunmehr zusammenfassend sagen, indem wir die Ausnahmefälle erster Ordnung uns als Grenzfälle, ohne sie besonders zu schreiben, eingeschlossen denken.

Wir haben in der Umgebung von $x = 0$ immer zwei Lösungen $\mathfrak{P}^{\alpha}$ und $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ von denen jede zwei Darstellungen durch hypergeometrische Reihen zuläßt, je nachdem man $(1-x)^{\beta}$ oder $(1-x)^{\gamma}$ heraussetzt:

$$\mathfrak{P}^{\alpha} = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\,{}_2F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma, 1+\alpha-\alpha', x) = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}\,{}_2F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta+\gamma, 1+\alpha-\alpha', x),$$

$$\mathfrak{P}^{\alpha'} = x^{\alpha'}(1-x)^{\beta}\,{}_2F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta+\gamma, 1+\alpha'-\alpha, x) = x^{\alpha'}(1-x)^{\gamma}\,{}_2F(\alpha'+\beta+\gamma, \alpha'+\beta+\gamma, 1+\alpha'-\alpha, x) -$$

Wählen wir nun das Verhalten der Integrale der Differentialgleichung an der Stelle $x = 0$ kennen, indem wir das entsprechende für die Punkte $x = 1$ und $x = \infty$ zu erfahren suchen

Wir werden eine lineare Substitution der Variablen x vornehmen, durch welche der zu untersuchende Punkt zum 0-Punkt wird; richtet man es zugleich so ein, daß die beiden andern singulären Punkte in ∞ und 1 übergehen, so erhält man wieder eine P-Function derselben Art, mit den singulären Stellen $0, \infty, 1$, nur daß sich die Exponenten untereinander vertauscht haben.

Man kommt so zu den Formeln der „linearen Transformation der hypergeometrischen Function", welche den Zweck haben, die für $x=0$ gefundenen Resultate auf die andern singulären Punkte zu übertragen, wobei sich von selbst noch eine gewisse Erweiterung der Resultate ergibt, die wir für $x=0$ besitzen.

Es kommen im Ganzen, einschließlich der Identität, sechs wohlbekannte lineare Substitutionen in Betracht, nämlich diejenigen, welche die Punkte $0, \infty, 1$ miteinander vertauschen; dieselben bilden eine Gruppe. Es sind

$$x'=x, \quad x'=\frac{x}{x-1}, \quad x'=\frac{1}{x}, \quad x'=\frac{1}{1-x}, \quad x'=1-x, \quad x'=\frac{x-1}{x}.$$

Es ist dieselbe Gruppe, welche in den verschiedensten Gebieten der Mathematik wiederkehrt, wie z.B. in der projectiven Geometrie als die verschiedenen

Werte des Doppelverhältnisses von 4 Punkten.

Diese 6 linearen Transformationen führen uns zu folgendem Schema:

$x' = x$	0	∞	1	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$		
$\frac{x}{x-1}$	0	1	∞	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & 1 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{x}{x-1} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \gamma & \beta & \frac{x}{x-1} \\ \alpha' & \gamma' & \beta' & \end{matrix}\right.$		
$\frac{1}{x}$	∞	0	1	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}\infty & 0 & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{1}{x} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \beta & \alpha & \gamma & \frac{1}{x} \\ \beta' & \alpha' & \gamma' & \end{matrix}\right.$		
$\frac{1}{1-x}$	1	0	∞	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}1 & 0 & \infty & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{1}{1-x} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \beta & \gamma & \alpha & \frac{1}{1-x} \\ \beta' & \gamma' & \alpha' & \end{matrix}\right.$		
$1-x$	1	∞	0	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}1 & \infty & 0 & \\ \alpha & \beta & \gamma & 1-x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \gamma & \beta & \alpha & 1-x \\ \gamma' & \beta' & \alpha' & \end{matrix}\right.$		
$\frac{x-1}{x}$	∞	1	0	$\mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}\infty & 1 & 0 & \\ \alpha & \beta & \gamma & \frac{x-1}{x} \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$	$= \mathfrak{P}\left\|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \gamma & \alpha & \beta & \frac{x-1}{x} \\ \gamma' & \alpha' & \beta' & \end{matrix}\right.$		

Die erste Colonne gibt hier die anzuwendende Substitution an, die 3 folgenden die dadurch bewirkte Vertauschung der singulären Punkte, in der folgenden Colonne ist in der $\mathfrak{P}$-function diese Vertauschung vorgenommen, und die letzten Formeln unterscheiden sich von den vorhergehenden nur durch die Reihenfolge in der Schreibung der singulären Punkte.

Man sieht also:

Die Function

$$\mathfrak{P}\left|\begin{matrix}0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right.$$

kann noch in 5 andern äquivalenten Weisen geschrieben werden, indem man das x geeigneten

linearen Transformationen unterwirft und die Werte $0\ \infty\ 1$ in entsprechender Weise permutirt.

Eine Vertauschung von $0, \infty, 1$ kommt auf dasselbe hinaus, wie die inverse Vertauschung der Buchstaben α, β, γ.

Indem wir nun für unsere 6 $\mathfrak{P}$-Functionen, welche schliefslich untereinander identisch sind, für jede unsere 4 Reihenentwicklungen anschreiben, haben wir im Ganzen 24 Reihenentwicklungen, von denen 8 für die Umgebung des Punktes $x=0$, 8 für die Umgebung des Punktes $x=\infty$, 8 für die Umgebung des Punktes $x=1$ gelten, so dafs wir für den Punkt $x=0$ selbst 4 neue Entwicklungen haben, und übrigens die Umgebung der Punkte $x=\infty$, $x=1$ in demselben Mafse beherrschen.

Diese 24 Reihenentwicklungen bilden natürlich einen Kernpunkt in der Theorie, und es ist das Verdienst von Kummer, diese 24 Reihen zuerst hingeschrieben zu haben. Wir selbst wollen dies nicht thun, da wir uns ja jetzt über die Entstehung derselben so klar sind, dafs wir in jedem gegebenen Falle die gerade gewünschte Reihe uns sofort bilden können. [Mo. d. 13. Nov. 93]

Für die Umgebung jedes der Punkte $0, \infty, 1$

existiren je zwei Zweige P^{α}, $P^{\alpha'}$ bezw. P^{β}, $P^{\beta'}$ und P^{γ}, $P^{\gamma'}$, für welche solche Entwicklungen gelten. Und zwar gehören von den 8 zu der Umgebung des Punktes gehörenden Reihenentwicklungen immer je 4 zu dem einen, je 4 zu dem andern der beiden Zweige.

Wir schreiben hier nur die 4 für den Zweig P^{α} geltenden Entwicklungen hin

1) $P^{\alpha} = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma}.\, F(\alpha+\beta+\gamma,\, \alpha+\beta'+\gamma,\, 1+\alpha-\alpha';\, x).$

2) $\quad = x^{\alpha}(1-x)^{\gamma'}.\, F(\alpha+\beta+\gamma',\, \alpha+\beta'+\gamma',\, 1+\alpha-\alpha';\, x).$

3) $\quad = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{\beta}.\, F\left(\alpha+\beta+\gamma,\, \alpha+\beta+\gamma',\, 1+\alpha-\alpha';\, \frac{x}{x-1}\right)$

4) $\quad = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{x}{x-1}\right)^{\beta'}.\, F\left(\alpha+\beta'+\gamma,\, \alpha+\beta'+\gamma',\, 1+\alpha-\alpha';\, \frac{x}{x-1}\right)$

Die für den andern Zweig $P^{\alpha'}$ geltenden Entwicklungen findet man hieraus durch Vertauschung von α mit α', die Entwicklungen für P^{β}, $P^{\beta'}$ sowie für P^{γ}, $P^{\gamma'}$ durch Ersetzung von x, $\frac{x}{x-1}$ durch $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{1-x}$ bezw. durch $1-x$, $\frac{x-1}{x}$ und entsprechende Vertauschung der Buchstaben α, β, γ, α', β', γ'.

Wir fragen nun aber, wenn wir zu irgend einem Zwecke eine der Reihen auswählen sollen, vor allem nach der Convergenz derselben.

Betrachten wir zuerst die nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen 1) und 2). Innerhalb des

Einheitskreises convergiren beide gewiß. Wie aber stehts auf der Peripherie des Einheitskreises?

Wir wenden das früher gegebene (Seite 36) Criterium an, drücken wir kurz a, b, c durch unsere Exponenten aus, so ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

	Convergenz auf dem ganzen Kreise	Convergenz mit Ausnahme von $x=1$:	Divergenz auf dem ganzen Kreise
Reihe 1)	$R(\gamma-\gamma')<0$	$0 \leqq R(\gamma-\gamma')<1$	$1 \leqq R(\gamma-\gamma')$
Reihe 2)	$R(\gamma'-\gamma)<0$	$0 \leqq R(\gamma'-\gamma)<1$	$1 \leqq R(\gamma'-\gamma)$

Man sieht hieraus, wenn an einer Stelle des Convergenzkreises die eine Reihe divergiren sollte, daß dann doch im Allgemeinen immer wenigstens die andere convergirt, es sei denn, daß $R(\gamma-\gamma')=0$ wäre, in welchem Falle beide Reihen zwar überall sonst auf dem Convergenzkreise convergiren, doch mit Ausnahme des Punktes $x=1$ selbst, in welchem dann beide Reihen divergiren. Abgesehen von diesem besonderen Falle dürfen wir also sagen, daß die eine Reihe auf dem Convergenzkreis brauchbar ist, falls die andere versagen sollte.

Wichtiger aber, als diese Frage nach dem Verhalten auf der Grenze des Convergenzgebietes, ist die Frage

nach der Ausdehnung des Convergenzgebietes selbst bei jeder einzelnen von unsern 24 Reihen.

Das Convergenzgebiet der nach x fortschreitenden Reihen, wissen wir, ist das Innere des Einheitskreises, gegeben durch die Ungleichung

$$|x| < 1,$$

während die Grenze des Convergenzgebietes, der Einheitskreis selbst, durch die Gleichung

$$|x| = 1$$

gegeben wird.

Genau ebenso wird das Convergenzgebiet irgend einer der andern, etwa einer nach $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ fortschreitenden Reihe durch die Ungleichung

$$\left|\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right| < 1,$$

die Grenze durch die Gleichung

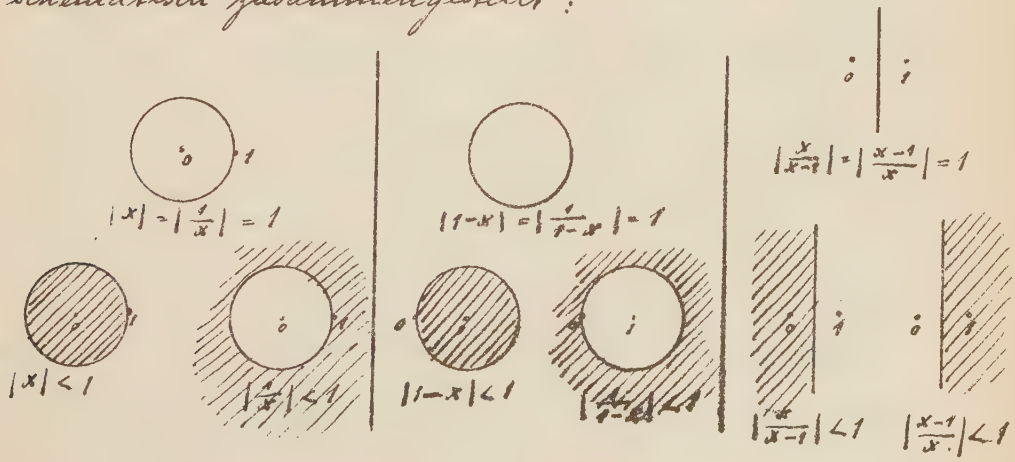
$$\left|\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right| = 1$$

gegeben.

Man sieht nun, daß immer je zwei der als Variable vorkommenden linearen Functionen von x, nämlich x und $\frac{1}{x}$, $1-x$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x-1}{x}$ und $\frac{x}{x-1}$ reciproke Werte voneinander sind. Zu je zwei solchen Variablen gehört dann immer dieselbe Convergenzgrenze, die Convergenzgebiete selbst liegen aber auf verschiedenen Seiten dieser Grenze, und

füllen zusammen gerade die ganze Ebene aus. Während z. B. die Reihen nach x im Innern des Einheitskreises convergiren, convergiren diejenigen nach $\frac{1}{x}$ ausserhalb desselben.

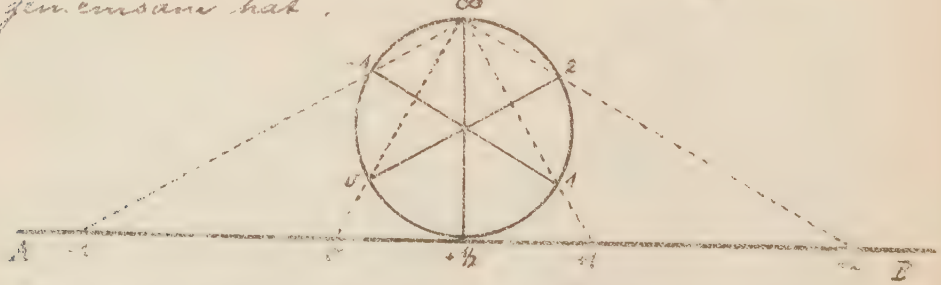
Entsprechend haben $1-x$ und $\frac{1}{1-x}$ dieselbe Convergenzgrenze, nämlich den mit dem Radius 1 um $x=1$ als Centrum gelegten Kreis; die Entwicklungen nach $1-x$ convergiren aber innerhalb, die nach $\frac{1}{1-x}$ ausserhalb dieses Kreises. Für $\frac{x}{x-1}$ und $\frac{x-1}{x}$ ist die im Punkte $x=\frac{1}{2}$ der reellen Axe errichtete Senkrechte die Grenze der Convergenz, das Convergenzgebiet der nach $\frac{x}{x-1}$ fortschreitenden Entwicklungen ist die links von dieser Geraden gelegene Halbebene, das der Reihen nach $\frac{x-1}{x}$ die Halbebene rechts. Es sind diese Fälle im Folgendem schematisch zusammengestellt:



Auf diese sechs Convergenzgebiete verteilen sich die 2n Reihen zu je 4, wobei die Frage, ob die einzelne Reihe auch noch auf der Grenze der Convergenzgebiete convergiert, wieder besonders zu entscheiden ist.

Auf den ersten Anblick mögen die 6 so erhaltenen Convergenzgebiete als ganz ungleichartig erscheinen; überträgt man jedoch mit Riemann unsere Figuren in gewisser Weise aus der Ebene auf eine Kugel, so zeigt sich, daß alle diese Gebiete ganz gleichberechtigt sind. In der Ebene nimmt eben das Unendlichferne für die Anschauung eine Sonderstellung ein, während auf einer Kugel alle Punkte gleichberechtigt erscheinen.

Man denke sich die Ebene der complexen Zahlen x senkrecht zur Papierfläche gestellt, so daß sie mit der Papierfläche die in der folgenden Figur mit AB bezeichnete Axe der reellen Zahlen gemeinsam hat.



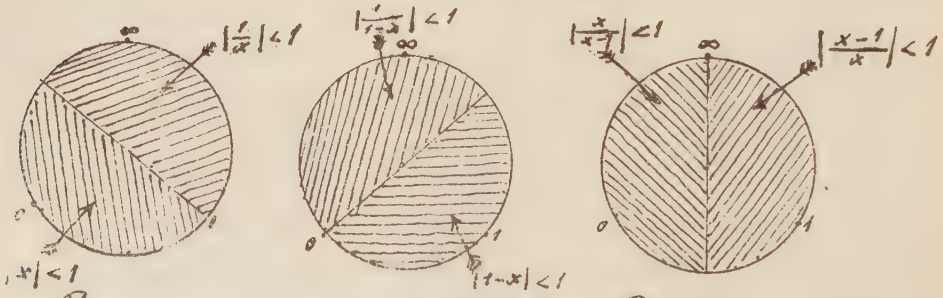
Man denke sich nun über der Strecke (0 1) dieser reellen

Axe in der Zeichenebene, also senkrecht zur complexen Zahlenebene, ein gleichseitiges Dreieck construirt, und die Höhe desselben zum Durchmesser einer Kugel gemacht, welche mithin die complexe Zahlenebene im Punkte $x = \frac{1}{2}$ berührt.

Projicirt man nun die complexe Zahlenebene von demjenigen Punkte der Kugel aus, welcher dem Berührungspunkte gegenüberliegt, auf die Kugelfläche, so entspricht der Axe der reellen Zahlen offenbar derjenige größte Kugelkreis, in welchem die Kugel die Zeichenebene schneidet. Die Punkte $0, 1, \infty$ entsprechen drei ganz gleichverteilten Punkten dieses Kreises, denselben welche auch in der Zeichnung mit $0, 1, \infty$ bezeichnet sind. Wir betrachten den Kreis, welcher der reellen Axe entspricht, am bequemsten als Äquator der Kugel. Dann geht bei der beschriebenen Projection der Convergenzkreis $|x| = \left|\frac{1}{x}\right| = 1$, d. h. der Einheitskreis um den 0-Punkt der x-Ebene in den durch den Punkt 1 des Äquators gehenden „Meridian" über, der Einheitskreis um $x = 1$ in den durch den Äquatorpunkt 0 gehenden Meridian, und die Convergenzgrenze der dritten Figur der vorigen Seite, die im Punkte $x = \frac{1}{2}$

zur reellen Axe senkrecht stehende Gerade, in den durch den Aequatorpunkt ∞ gehenden Meridian. In unserer Figur sind diese 3 Meridiane durch orthogonale Projection als Durchmesser des gezeichneten Kreises in die Zeichenebene projicirt.

Man sieht, daß die 6 Convergenzbereiche auf der Kugel gar keine Unterschiede mehr zeigen, alle sind Halbkugeln, deren Begrenzungen durch die beiden Pole der Kugel gehen, nur jede um 30° gegen die andere gedreht. Dabei ergänzen sich immer je zwei zur vollen Kugelfläche, wie vorher die Convergenzbereiche zur vollen Ebene. Die Convergenzbereiche von Seite 82 zeigen also auf die Kugel übertragen (und orthogonal auf die Zeichenebene projicirt) folgendes Aussehen:



Bei unserer stereographischen Projection verwandeln sich die drei Convergenzgrenzen der x-Ebene in 3 Meridiane der Kugel, welche miteinander

gleiche Winkel bilden, und die 6 Convergenzbereiche in 6 Halbkugeln, von denen jede auf der Kugel um 30° gegen die vorhergehende gedreht ist.

Hierdurch dürfte die volle Gleichberechtigung aller unserer verschiedenen Reihenentwicklungen und Convergenzbereiche hinreichend vor Augen geführt sein.

Wir gehen nunmehr zu einer andern Aufgabe über, zu welcher uns die Existenz der Lösungen P^{α} und $P^{\alpha'}$, P^{β} und $P^{\beta'}$, P^{γ} und $P^{\gamma'}$ hinführt.

Wir wissen nämlich, daß sich jede Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung aus irgend zwei linear unabhängigen Lösungen derselben linear zusammensetzen lassen muß, also sowohl aus P^{α}, $P^{\alpha'}$, wie aus P^{β}, $P^{\beta'}$ oder aus P^{γ}, $P^{\gamma'}$. Insbesondere müssen sich die Fundamentallösungen P^{α}, $P^{\alpha'}$ des Punktes $x = 0$ jede linear sowohl aus P^{β}, $P^{\beta'}$ wie aus P^{γ}, $P^{\gamma'}$ herstellen lassen, vermittelst Formeln folgender Art:

$$P^{\alpha} = \alpha_{\beta} P^{\beta} + \alpha_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha_{\gamma} P^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} P^{\gamma'}$$

$$P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta} P^{\beta} + \alpha'_{\beta'} P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma} P^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'} P^{\gamma'}$$

Es handelt sich nun darum, die hierin eintretenden Constanten α_β, $\alpha_{\beta'}$, α'_β, $\alpha'_{\beta'}$ u.s.w. zu bestimmen. Die so zu erhaltenden Formeln, welche den Zusammenhang zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentallösungen herstellen, werden wir die „Zusammenhangsformeln" nennen. [Di. d. 14. Nov. 93.]

Wir wollen z.B. α_γ und $\alpha_{\gamma'}$ bestimmen.

Wir setzen in die Gleichung:

$$\mathfrak{P}^\alpha = \alpha_\gamma \mathfrak{P}^\gamma + \alpha_{\gamma'} \mathfrak{P}^{\gamma'}$$

die betreffenden Reihenentwicklungen ein, und erhalten:

$$x^\alpha(1-x)^\beta F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha'; x) = \alpha_\gamma (1-x)^\gamma x^\alpha F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\gamma-\gamma', 1-x)$$
$$+ \alpha_{\gamma'} (1-x)^{\gamma'} x^\alpha F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1+\gamma'-\gamma, 1-x).$$

Diese ganze Gleichung dividiren wir noch durch $x^\alpha(1-x)^\gamma$ und erhalten also:

$$F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\alpha-\alpha'; x) = \alpha_\gamma F(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta'+\gamma, 1+\gamma-\gamma', 1-x)$$
$$+ \alpha_{\gamma'} (1-x)^{\gamma'-\gamma} F(\alpha+\beta+\gamma', \alpha+\beta'+\gamma', 1+\gamma'-\gamma, 1-x)$$

Um nun α_γ und $\alpha_{\gamma'}$ als Functionen von $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ auszudrücken, hat man nur für x irgend zwei spezielle Werte x_1 und x_2 einzusetzen, für welche alle vorkommenden Reihen bei beliebigen Werten der Exponenten convergiren, und also analytische Functionen der α, α' u.s.w. mit

unbeschränkter Veränderlichkeit der Argumente definiren. Hierfür müssen x_1 und x_2 beide den Bedingungen $|x| < 1$, $|1-x| < 1$ gleichzeitig genügen. Man kann etwa $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{3}$ setzen.

Man erhält so zwei lineare Gleichungen für α_γ und $\alpha_{\gamma'}$ aus welchen man diese als analytische Functionen der Exponenten mit unbeschränkter Veränderlichkeit der Argumente berechnet, etwa

$$\alpha_\gamma = \varphi\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix} \qquad \alpha_{\gamma'} = \varphi\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma' \\ \alpha', \beta', \gamma\end{pmatrix}$$

Dabei muß, wie leicht zu sehen, $\alpha_{\gamma'}$ aus α_γ durch Vertauschung von γ und γ' hervorgehen. Auch die andern Größen $\alpha'_\gamma, \alpha'_{\gamma'}, \alpha_\beta, \alpha_{\beta'}, \alpha'_\beta, \alpha'_{\beta'}$ u. s. w. müssen sich aus der einen Function α_γ durch Buchstabenvertauschungen ergeben.

Es genügt also, wenn man irgend einen der Coefficienten, etwa α_γ, berechnen kann.

Wir setzen nun vielleicht voraus, daß $R(\gamma-\gamma') < 0$ sei. Dann convergiren für $x = 1$ sämtliche Reihen, die nach x fortschreitende nach dem auf S. [illegible] angegebenen Convergenzkriterium, die Reihen auf der rechten Seite, weil $1-x = 0$ ist. Ferner verschwindet das zweite Glied auf der rechten Seite

wegen des Factors $(1-x)^{\delta'-\delta}$, dessen Exponent einen positiven reellen Teil hat, und die mit α_γ multiplicirte $\mathfrak{F}$-Reihe reducirt sich, da ihr Argument verschwindet, auf ihr erstes Glied, also auf 1. Die Gleichung ergibt dann unmittelbar

$$\alpha_\gamma = \mathfrak{F}(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma,\ 1+\alpha-\alpha';\ 1)$$

Hierbei ist aber wohl zu beachten dass diese Bestimmung von α_γ im Gegensatz zu der früheren allgemeingültigen Berechnung aus $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$ durchaus an die Bedingung $R(\gamma-\gamma')<0$ gebunden ist.

<u>Der Coefficient α_γ ist eine analytische Function der 6 Exponenten, welche in dem Bereiche $R(\gamma-\gamma')<0$ durch die unendliche Reihe</u>

$$\mathfrak{F}(\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha+\beta'+\gamma,\ 1+\alpha-\alpha';\ 1)$$

<u>darstellbar ist</u>

Wir haben früher (S. 24) die hypergeometrische Reihe $\mathfrak{F}(a,b,c,1)$ mit dem Argument 1 innerhalb ihres Convergenzgebietes durch ein unendliches Product dargestellt, und für letzteres, allerdings vorläufig nur rein historisch, einen geschlossenen Ausdruck mit Hülfe der Gauß'schen Π-Function gegeben

$$\mathfrak{F}(a,b,c,1) = \frac{\Pi(c-1)\ \Pi(c-a-b-1)}{\Pi(c-a-1)\ \Pi(c-b-1)}$$

Setzt man hierin die Werte für a, b, c ein, so ergibt sich:

$$\alpha_\gamma = \frac{\Pi(\alpha-\alpha')\,\Pi(\gamma'-\gamma-1)}{\Pi(-\alpha'-\beta-\gamma)\,\Pi(-\alpha'-\beta'-\gamma)}$$

α_γ ist durch unser Verfahren zunächst nur für den Bereich $R(\gamma-\gamma')<0$ der Variablen definirt, und auch nur so weit ist vorläufig die letzte Formel in Geltung. Wir werden aber später die Gauß'sche Π-Function als analytische Function bei unbeschränkter Variabilität des Arguments definiren können. Dann gibt uns die letzte Formel zugleich die analytische Fortsetzung von α_γ über das Gebiet $R(\gamma-\gamma')<0$ hinaus; da wir nun aber auf der vorigen Seite gesehen haben, daß α_γ allgemein dieselbe analytische Function ist, so stimmt sie mit ihren analytischen Fortsetzungen überein, und man hat:

<u>Die allgemeine Definition derjenigen analytischen Function der 6 Exponenten, welcher unser Coefficient α_γ gleich ist, ergibt sich, wenn wir unsere F-Reihe mit Gauß durch das Functionszeichen Π ausdrücken und eine allgemeingültige Definition für das Functionszeichen Π aufstellen.</u>

Jeder einzelne der 8 Coefficienten wird als ein

Aggregat von 4 Factoren Π erscheinen, die sich durch Buchstabenvertauschung aus unserer einen Formel für α_γ ergeben.

Dabei spielt aber auch folgende schon früher gelegentlich der Integraldarstellung gestreifte Frage herein. Wir haben unter P^α eine Function von folgender Gestalt verstanden

$$x^\alpha(1-x)^\gamma(1+A_1 x + A_2 x^2 + \ldots)$$

also eine Function, für welche der erste Coefficient der Reihenentwicklung $=1$ ist. Wenn wir aber statt dieser Function eine andere P^α nehmen wollten, welche sich von ihr um irgend einen bestimmten von x unabhängigen Factor unterscheidet, und entsprechend bei den andern Fundamentallösungen verfahren, so würden wir natürlich für die Coefficienten α_γ u. s. w. andere Werte erhalten; es fragt sich, ob wir durch geeignete Wahl dieser multiplicativen Constanten in den 6 Fundamentallösungen einfachere Zusammenhangsformeln erhalten würden? Wir verschieben die Beantwortung dieser Frage auf die Besprechung der Integraldarstellung, und fixiren hier nur das Problem durch den Satz:

<u>Bei der Bestimmung der α_γ u. s. w. sind wir</u>

von der Annahme ausgegangen, daß der Coefficient des ersten Gliedes in der Reihenentwicklung von $\mathfrak{P}_\alpha$ $\mathfrak{P}_{\alpha'}$ $\mathfrak{P}_\beta$ $\mathfrak{P}_{\beta'}$ $\mathfrak{P}_\gamma$ $\mathfrak{P}_{\gamma'}$ jedesmal die 1 sei.

Es wäre die Frage, ob man nicht in die Definition der Fundamentallösungen noch solche von den Exponenten abhängende constante Factoren mit aufnehmen könnte, daß die Constanten der Zusammenhangsformeln entsprechend einfachere Werte bekommen.

Ferner verweisen wir schon hier auf einen Artikel von Bolza in den Math. Ann. Bd. 42. 1892-93, und wollen ein bemerkenswertes Resultat hervorheben, welches doppelt abgeleitet wird.

Bei geeigneter Definition von Zusatzfactoren entdeckt eine merkwürdige Beziehung des Formelsystems zur sphärischen Trigonometrie.

Fragen wir nun schließlich noch nach dem Nutzen unserer Zusammenhangsformeln, so sehen wir doch, daß uns z.B. die Formel auf Seite 57 die Umwandlung einer nach x fortschreitenden hypergeometrischen Reihe in eine nach $(1-x)$ fortschreitende Potenzreihe leistet:

$$F(x) = F_1(1-x) + (1-x)^{\gamma'-\gamma} F_2(1-x)$$

Handelt es sich nun etwa um die numerische

Berechnung der Reihe $F(x)$ für einen reellen Wert von x, der zwar noch kleiner als 1 ist, der Einheit aber schon nahe kommt, so convergirt die Reihe $F(x)$ nur schlecht, die Reihen $F_1(1-x)$ und $F_2(1-x)$ aber desto besser.

Gerade dieser Gesichtspunkt der bequemen numerischen Ausrechnung leitet die älteren Mathematiker, wie Euler – bei dem die Entwicklung der vorstehenden Formel den Hauptinhalt der danach betitelten grundlegenden Arbeit: De singulari quadam transformatione bildet – Gauß, u. s. w. wenn sie diese Formel besonders betonen.

Euler und Gauß haben diese Formel zunächst durchaus so angesehen, daß an Stelle der ursprünglichen hypergeometrischen Reihe, wenn sie schlecht convergirt, besser convergirende Reihenentwicklungen gesetzt werden können, denn bei Euler und Gauß ist die wirkliche Berechnung der Functionen immer ein hauptsächlicher Maßstab für den Wert einer Formel.

Andererseits knüpft sich an diese Zusammenhangsformeln jene tiefere Auffassung vom Wesen der hypergeometrischen Function an, welche wir

die Riemann'sche Auffassung nennen.

Und zwar hat man hierin zwei Standpunkte zu unterscheiden.

Das einemal denken wir uns die 3 singulären

Punkte durch einen von 0 über 1 nach ∞ verlaufenden, übrigens beliebig gestalteten Querschnitt verbunden. Verabreden wir nun, daß die Variable x diesen Querschnitt nicht überschreitet, so ist irgend eine Lösung y der Differentialgleichung in der ganzen zerschnittenen Ebene ein wohlbestimmter eindeutiger Functionszweig. Aus irgend zwei solchen Functionszweigen y_1, y_2 setzt sich der allgemeinste der Differentialgleichung genügende Functionszweig in der Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ zusammen. Dieser Inbegriff aller linearen Combinationen zweier Functionszweige ists, was ich eine „binäre Schar von Functionszweigen" nenne.

Dieses wäre die erste Bedeutung des Functionszeichens

$$P\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix},$$

daß damit die ganze binäre Schar von Functionszweigen $c_1 y_1 + c_2 y_2$ gemeint ist, welche unsere Differentialgleichung befriedigt, wobei die nähere Definition dieser Zweige natürlich von der Art des Querschnitts bedingt ist, den wir uns in der x-Ebene gezogen denken.

Zweitens aber denken wir uns irgend einen der Zweige über den Querschnitt hinaus und beliebig um den singulären Punkt herum fortgesetzt. Wir erhalten dadurch beliebig viele Zweige, die alle die Gestalt $c_1 y_1 + c_2 y_2$ haben müssen, bei denen aber c_1 c_2 ganz bestimmte von der Wahl des Ausgangszweiges und des Weges der analytischen Fortsetzung abhängige Größen sind.

Zweitens verstehen wir unter einer P-Function den Inbegriff aller derjenigen Zweige $c_1 y_1 + c_2 y_2$, die sich aus einem beliebig gewählten Anfangszweige bei beliebiger Umlaufung der singulären Punkte ergeben.

Alle die unendlich vielen Zweige, welche hier zu einer gegebenen P-Function zusammengefaßt werden, sind immer in der binären Schar $y_1 + c_2 y_2$ enthalten.

Achten wir insbesondere auf die zum Punkte $x = 0$

gehörigen Fundamentalzweige:

$$\mathfrak{P}^{\alpha} = x^{\alpha}\,\mathfrak{P}(x) \qquad \mathfrak{P}^{\alpha'} = x^{\alpha'}\,\mathfrak{P}'(x)$$

und lassen die Variable den 0-Punkt einmal in positivem Sinne umkreisen. Dann geht x, und also auch die Potenzreihen $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{P}'(x)$ in sich selbst über; x^{α} aber multiplicirt sich mit $e^{2i\pi\alpha}$, $x^{\alpha'}$ mit $e^{2i\pi\alpha'}$. Dieselben Multiplicationen erleiden also die Fundamentalzweige $\mathfrak{P}^{\alpha}$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ selbst. Entsprechendes gilt für die zu $x=1$ und zu $x=\infty$ gehörigen Fundamentallösungen; wir haben also das Ergebnis:

Insbesondere ändern sich $\mathfrak{P}^{\alpha}$ und $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ bei Umlaufung des Punktes 0, $\mathfrak{P}^{\beta}$ und $\mathfrak{P}^{\beta'}$ bei Umlaufung des Punktes $x=\infty$, $\mathfrak{P}^{\gamma}$ und $\mathfrak{P}^{\gamma'}$ bei Umlaufung von $x=1$ um je eine multiplicative Constante.

Wenn wir nun wissen, wie sich $\mathfrak{P}^{\alpha}$ und $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ aus $\mathfrak{P}^{\beta}$ und $\mathfrak{P}^{\beta'}$ bezw. aus $\mathfrak{P}^{\gamma}$ und $\mathfrak{P}^{\gamma'}$ zusammensetzen, dann können wir auch sehen, was aus $\mathfrak{P}^{\alpha}$ und $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ wird, wenn wir die Variable um 1 bezw. um ∞ herumführen.

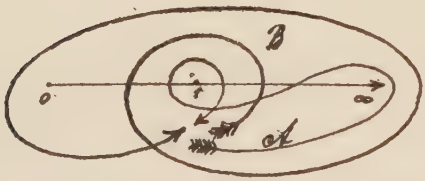
Unsere Zusammenhangsformeln haben hier die Bedeutung, daß wir aus ihnen gleich ablesen können, wie sich z. B. die $\mathfrak{P}^{\alpha}$, $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ verhalten, wenn wir die Variable x statt um den Punkt $x=0$ um

den Punkt $x = \infty$ oder um den Punkt $x = 1$ herumlaufen lassen.

[Mo. d. 20. Nov. 93.]

Heute will ich zum Schlusse dieses Kapitels auf die Riemann'sche Theorie, zu der wir das letzte Mal vorgedrungen sind, in einigen Punkten etwas näher eingehen.

Es seien irgend zwei linear unabhängige Zweige y_1, y_2 ausgewählt, welche der Differentialgleichung genügen. Läßt man nun die unabhängige Variable x irgend einen die Punkte $0, 1, \infty$ in beliebiger Weise umlaufenden geschlossenen Weg $\mathfrak{A}$ beschreiben, so verwandeln sich die $y_1\ y_2$ beide in je einen neuen Zweig, der sich durch die Ausgangszweige y_1, y_2, da diese als linear unabhängig vorausgesetzt wurden, linear ausdrückt, d. h. y_1 und y_2 erleiden bei Durchlaufung irgend eines geschlossenen Weges $\mathfrak{A}$ eine „lineare Substitution" $\mathfrak{S}$.



$$\text{Weg } \mathfrak{A}: \quad \left\{ \begin{aligned} y_1' &= c_{11}\, y_1 + c_{12}\, y_2 \\ y_2' &= c_{21}\, y_1 + c_{22}\, y_2 \end{aligned} \right\} \text{ Substitution } \mathfrak{S}.$$

Läßt man die Variable x statt des Weges $\mathfrak{A}$ einen andern geschlossenen Weg $\mathfrak{B}$ beschreiben, so erleiden

y_1, y_2 eine andere lineare Substitution, die ich $\mathfrak{T}$ nenne:

Weg $\mathfrak{B}$: $\left\{\begin{array}{l} y_1' = d_{11} y_1 + d_{12} y_2 \\ y_2' = d_{21} y_1 + d_{22} y_2 \end{array}\right\}$ Substitution $\mathfrak{T}$.

Läßt man nun die unabhängige Variable erst den Weg $\mathfrak{A}$, dann den Weg $\mathfrak{B}$ beschreiben, so verwandeln sich y_1, y_2 zuerst in

$$c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$c_{21} y_1 + c_{22} y_2;$$

darauf verwandeln sich die y_1, y_2 in diesen Ausdrücken der Substitution $\mathfrak{T}$ entsprechend in

$$d_{11} y_1 + d_{12} y_2,$$
$$d_{21} y_1 + d_{22} y_2,$$

so daß sich also schließlich y_1, y_2 in folgende Ausdrücke umgewandelt haben

$$c_{11}(d_{11} y_1 + d_{12} y_2) + c_{12}(d_{21} y_1 + d_{22} y_2) = (c_{11} d_{11} + c_{12} d_{21}) y_1 + (c_{11} d_{12} + c_{12} d_{22}) y_2$$
$$c_{21}(d_{11} y_1 + d_{12} y_2) + c_{22}(d_{21} y_1 + d_{22} y_2) = (c_{21} d_{11} + c_{22} d_{21}) y_1 + (c_{21} d_{12} + c_{22} d_{22}) y_2$$

Diese selbe lineare Substitution erhält man aber wenn man auf y_1, y_2 zuerst die Substitution $\mathfrak{T}$ anwendet, und auf die so gefundenen y_1', y_2' die

Substitution S. D. h.

Der Aufeinanderfolge zweier Wege A, B entspricht die umgekehrte Aufeinanderfolge der zugehörigen Substitutionen.

Jeder geschlossene Umlauf in der x-Ebene läßt sich offenbar durch Combination und Wiederholung aus drei Fundamentalwegen zusammensetzen, nämlich aus einfachen Schleifen um je einen der Punkte $0, 1, \infty$. Also lassen sich auch alle Substitutionen, welche y_1, y_2 erleiden, aus drei „erzeugenden Substitutionen" zusammensetzen, welche je einer der drei Schleifen entsprechen.

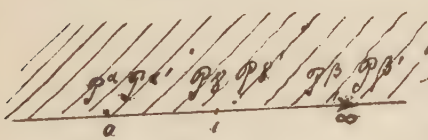
Die Gesammtheit aller dieser durch Combination und Wiederholung der erzeugenden Substitutionen entstehenden Substitutionen ist eine „Gruppe linearer Substitutionen."

Bei der Gesammtheit aller möglichen Umläufe, die wir in der x-Ebene ausführen, entsteht eine Gruppe linearer Substitutionen von y_1, y_2, welche diejenigen drei linearen Substitutionen, die den Umläufen um $0, 1, \infty$ einzeln entsprechen, zu Erzeugenden hat.

Dies nennt man die Gruppe der P-Function, genauer die zu den Ausgangszweigen y_1, y_2 gehörige Gruppe. Es ist eine „discontinuirliche Gruppe," weil sie durch Wiederholung ganz bestimmter einzelner Schritte erwächst. Im Allgemeinen besteht sie aus einer unendlichen, in gewissen speciellen Fällen aus einer endlichen Anzahl von Substitutionen.

Die Gruppe linearer Substitutionen, welche wir hier bei der P-Function finden, ist eine discontinuirliche Gruppe und zwar im Allgemeinen eine unendliche Gruppe, die sich nur in speciellen Fällen auf eine endliche Gruppe linearer Substitutionen reducirt.

Es handelt sich nun darum, diese Gruppe wirklich aufzustellen, d.h. ihre Erzeugenden zu berechnen. Wir wollen die Ebene längs der ganzen Axe der reellen Zahlen aufschneiden, und uns zuerst nur in der positiven Halbebene bewegen.



Dann haben irgend zwei Zweige y_1, y_2 ganz bestimmte Ausdrücke durch die zu $0, \infty, 1$ gehörigen Fundamentalzweige, etwa

$$y_1 = l_1 P^\alpha + l_1' P^{\alpha'} = m_1 P^\beta + m_1' P^{\beta'} = n_1 P^\gamma + n_1' P^{\gamma'}$$
$$y_2 = l_2 P^\alpha + l_2' P^{\alpha'} = m_2 P^\beta + m_2' P^{\beta'} = n_2 P^\gamma + n_2' P^{\gamma'}$$

Ich behaupte nun (was wir in speciellerer Form schon am Ende der vorigen Stunde berührten):

Wenn ich weiß, wie die Anfangszweige $y_1\ y_2$ einerseits mit den $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ andererseits mit den $\mathfrak{P}^\beta\ \mathfrak{P}^{\beta'}$ endlich mit $\mathfrak{P}^\gamma\ \mathfrak{P}^{\gamma'}$ zusammenhängen, dann kann ich die Erzeugenden der Gruppe sofort berechnen.

Lassen wir z. B. α einen Umlauf um 0 machen, so multipliciren sich $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ mit $e^{2i\pi^\alpha}$, $e^{2i\pi^{\alpha'}}$.

Man hat also

$$y_1 = l_1 \mathfrak{P}^\alpha + l_1' \mathfrak{P}^{\alpha'}, \quad y_1' = l_1 e^{2i\pi^\alpha} \mathfrak{P}^\alpha + l_1' e^{2i\pi^{\alpha'}} \mathfrak{P}^{\alpha'}$$

$$y_2 = l_2 \mathfrak{P}^\alpha + l_2' \mathfrak{P}^{\alpha'} \quad y_2' = l_2 e^{2i\pi^\alpha} \mathfrak{P}^\alpha + l_2' e^{2i\pi^{\alpha'}} \mathfrak{P}^{\alpha'}.$$

Durch Elimination von $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ erhält man nun in der That y_1', y_2' linear durch y_1, y_2 ausgedrückt, d. h. <u>man berechnet die einem Umlaufe um 0 entsprechende Erzeugende der Gruppe durch Elimination von $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ aus den zwei Gleichungspaaren.</u>

Das Entsprechende gilt natürlich von den beiden anderen Erzeugenden der Gruppe.

Hier kommt nun die Bedeutung der Zusammenhangsformeln zum Augenschein: Wählen wir

nämlich einmal die Zweige $\mathcal{P}^{\alpha}, \mathcal{P}^{\alpha'}$ selbst als Ausgangszweige, so kennen wir vermöge der Zusammenhangsformeln unmittelbar die Coefficienten l, l'; m, m'; n, n'

$$y_1 = 1 . \mathcal{P}^{\alpha} + 0 . \mathcal{P}^{\alpha'} = \alpha_{\beta} \mathcal{P}^{\beta} + \alpha_{\beta'} \mathcal{P}^{\beta'} = \alpha_{\gamma} \mathcal{P}^{\gamma} + \alpha_{\gamma'} \mathcal{P}^{\gamma'}$$

$$y_2 = 0 . \mathcal{P}^{\alpha} + 1 . \mathcal{P}^{\alpha'} = \alpha'_{\beta} \mathcal{P}^{\beta} + \alpha'_{\beta'} \mathcal{P}^{\beta'} = \alpha'_{\gamma} \mathcal{P}^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'} \mathcal{P}^{\gamma'}.$$

und man findet die zu ∞ und 1 gehörigen Substitutionen durch Elimination von $\mathcal{P}^{\beta}, \mathcal{P}^{\beta'}$ bezw. $\mathcal{P}^{\gamma}, \mathcal{P}^{\gamma'}$ aus diesen und den transformirten Gleichungssystemen, während einem Umlauf um 0 unmittelbar blosse Multiplicationen entsprechen.

Die Bedeutung der Zusammenhangsformeln der vorigen Stunde für unsere Betrachtungen ist jetzt zuvörderst die, dass sie uns die erzeugenden Substitutionen für die Gruppe derjenigen linearen Transformationen liefern, welche sich bei analytischer Fortsetzung für diejenigen beiden $\mathcal{P}$-Functionen ergeben, deren Anfangszweige $\mathcal{P}^{\alpha}, \mathcal{P}^{\alpha'}$ sind.

Wählen wir nun ein anderes Paar von Anfangszweigen:

$$y_1 = l_1 \mathcal{P}^{\alpha} + l'_1 \mathcal{P}^{\alpha'}$$
$$y_2 = l_2 \mathcal{P}^{\alpha} + l'_2 \mathcal{P}^{\alpha'}$$

mit beliebigen Zahlen $l_1 l'_1 l_2 l'_2$, so können wir durch Einsetzen der Zusammenhangsformeln

dieselben y_1 y_2 auch durch $P\beta$, $P\beta'$ und durch $P\gamma$, $P\gamma'$ ausdrücken, also die Zahlen m und n, und daraus die drei Fundamentalsubstitutionen berechnen. Also dürfen wir sagen:

<u>Weitergehend erfahren wir überhaupt die Gruppe für irgend zwei Anfangszweige y_1, y_2, wenn wir nur wissen, wie sich y_1, y_2 insbesondere aus den $P\alpha$, $P\alpha'$ zusammensetzen.</u>

Die Zusammenhangsformeln sind also gewissermaßen die Grundlage für unsere Gruppe.

Nunmehr wollen wir von der Betrachtung in der Weise umkehren, daß wir von der Gruppe ausgehen und nun fragen, wodurch in Beziehung auf die Gruppe die zu $0, \infty, 1$ gehörigen Fundamentalzweige vor andern Funktionenzweigen ausgezeichnet sind.

Eine Substitution heiße:

$$y_1' = c_{11} y_1 + c_{12} y_2,$$
$$y_2' = c_{21} y_1 + c_{22} y_2.$$

Wir fragen uns nun, ob wir diese Substitution nicht durch Einführung zweier linearer Verbindungen von y_1, y_2 als neuer Veränderlichen auf eine besonders einfache, eine „<u>kanonische Form</u>" bringen können?

Wir setzen:

$$z_1 = k_1 y_1 + k_2 y_2$$
$$z_2 = l_1 y_1 + l_2 y_2$$

und wollen versuchen, die Constanten k_1, k_2, l_1, l_2 so einzurichten, daß die neuen Veränderlichen Substitutionen von der Gestalt:

$$z_1' = \varrho_1 z_1$$
$$z_2' = \varrho_2 z_2$$

erleiden. D. h. es soll

$$k_1 y_1' + k_2 y_2' = \varrho_1 (k_1 y_1 + k_2 y_2)$$
$$l_1 y_1' + l_2 y_2' = \varrho_2 (l_1 y_1 + l_2 y_2)$$

werden. Ich setze die Werte von y_1', y_2' ein, und bekomme:

$$(k_1 c_{11} + k_2 c_{21}) y_1 + (k_1 c_{12} + k_2 c_{22}) y_2 = \varrho_1 k_1 y_1 + \varrho_1 k_2 y_2$$
$$(l_1 c_{11} + l_2 c_{21}) y_1 + (l_1 c_{12} + l_2 c_{22}) y_2 = \varrho_2 l_1 y_1 + \varrho_2 l_2 y_2$$

Diese Gleichungen sollen Identitäten sein, so daß die Coefficienten rechts und links gleich sein müssen. So folgen aus der ersten Identität die beiden Gleichungen:

$$k_1 (c_{11} - \varrho_1) + k_2 c_{21} = 0$$
$$k_1 c_{12} + k_2 (c_{22} - \varrho_1) = 0.$$

Aus diesen folgt für ϱ_1 eine Gleichung zweiten Grades.

Eine Gleichung von genau derselben Form folgt für ϱ_2 aus der zweiten Identität, wir schreiben sie daher ohne Index an ϱ, indem dann ϱ_1, ϱ_2 einfach die beiden Wurzeln folgender quadratischen Gleichung sind.

$$\begin{vmatrix} c_{11}-\varrho & c_{21} \\ c_{12} & c_{22}-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

Dies gibt im Allgemeinen zwei verschiedene Werte von ϱ_1, ϱ_2, aus denen sich dann die Größen k_1, k_2 und l_1 l_2 ihrem Verhältnisse nach berechnen lassen, während die absoluten Werte der k_1, k_2, resp. der l_1, l_2 unbestimmt bleiben.

In der That läßt sich im Allgemeinen die kanonische Form

$$z_1' = \varrho_1 z_1$$
$$z_2' = \varrho_2 z_2$$

herstellen; man hat für ϱ_1, ϱ_2 nur die beiden Wurzeln der „charakteristischen Gleichung" zu setzen.

Wir mußten diesen Satz „im Allgemeinen" aussprechen; denn es erhebt sich die Frage nach den Ausnahmefällen.

Diese treten dann ein, wenn die charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ hat, und sind noch in „Ausnahmefälle 1. Ordnung" und „Ausnahmefälle 2. Ordnung" zu unterscheiden.

Ist $\varrho_1 = \varrho_2$, so sprechen wir von einem Ausnahmefall, bezeichnen aber als Ausnahmefall zweiter Ordnung, wenn auch noch alle Unterdeterminanten unserer Determinante verschwinden.

[Di. d. 21. Nov. 93.]

Im allgemeinen Falle lautet die kanonische Form in der That, wie wir von Anfang angenommen

$$z_1' = \varrho_1 z_1, \quad z_2' = \varrho_2 z_2$$

Im Ausnahmefall erster Ordnung, der durch die Relation

$$4 c_{12} c_{21} + (c_{11} - c_{22})^2 = 0$$

charakterisirt ist, muß man als kanonische Form eine Substitution von der Gestalt

$$z_1' = \varrho z_1 + \sigma z_2$$
$$z_2' = \varrho z_2$$

benutzen, in welcher σ eine von 0 verschiedene Constante ist.

Der Ausnahmefall zweiter Ordnung liegt vor, wenn

$c_{12} = c_{21} = 0 \quad c_{11} = c_{22}$ ist

Dann lautet die kanonische Substitution wieder entsprechend wie im allgemeinen Fall, nämlich, $\rho = c_{11} = c_{22}$ gesetzt:

$$z_1' = \rho z_1$$
$$z_2' = \rho z_2$$

und zwar hat dann schon die gegebene Substitution diese kanonische Form.

Betrachten wir statt der Zweige z_1, z_2 selbst ihren Quotienten $z = \frac{z_1}{z_2}$, so erleidet dieser im allgemeinen Falle eine Multiplication mit einer Constanten:

$$z' = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot z,$$

dagegen im Ausnahmefall erster Ordnung, den man als den Fall einer „<u>parabolischen Substitution</u>" zu benennen pflegt, die Addition einer Constanten:

$$z' = z + \frac{\sigma}{\rho},$$

endlich im Ausnahmefall zweiter Ordnung bleibt z ganz ungeändert:

$$z' = z.$$

Beziehen wir nun diese Betrachtungen auf die Substitutionen der $\mathcal{P}$-function.

Führen wir die einem Umlauf um $x = 0$ entsprechende Substitution:

$$y_1' = c_{11} y_1 + c_{12} y_2$$
$$y_2' = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

irgend zweier Zweige durch die Formeln

$$z_1 = k_1 y_1 + k_2 y_2$$
$$z_2 = l_1 y_1 + l_2 y_2$$

auf eine kanonische Form zurück, so ist zu fragen, was für besondere functionentheoretische Bedeutung die so eingeführten speciellen Zweige z_1, z_2 haben? Ich behaupte nun:

Die kanonischen z_1, z_2 sind einfach die Fundamentallösungen, die wir bei dem Punkte $x = 0$ von früher kennen. Und umgekehrt:

Die früher für den Punkt $x = 0$ aufgestellten Fundamentallösungen repräsentiren gerade diejenigen Functionszweige, welche man zu Grunde legen muss, damit unsere lineare Substitution in ihrer kanonischen Form erscheint.

Wir haben früher bei Aufstellung der Fundamentalösungen ähnlich wie hier bei der kanonischen Form einer Substitution einen allgemeinen Fall, Ausnahmefälle erster Ordnung und einen Ausnahmefall zweiter Ordnung unterschieden. Es zeigt sich nun, dass diese Fälle ganz genau den ebenso benannten Fällen der kanonischen Substitutionen entsprechen.

1.) Im Allgemeinen Falle ist

$$z_1 = \mathfrak{P}^{\alpha} = x^{\alpha} \mathfrak{p}(x), \quad z_1' = e^{2i\pi\alpha} x^{\alpha} \mathfrak{p}(x) = e^{2i\pi\alpha} \cdot z_1,$$
$$z_2 = \mathfrak{P}^{\alpha'} = x^{\alpha'} \mathfrak{p}'(x), \quad z_2' = e^{2i\pi\alpha'} x^{\alpha'} \mathfrak{p}'(x) = e^{2i\pi\alpha'} \cdot z_2.$$

Es ist also einfach

$$\varrho_1 = e^{2i\pi\alpha}, \quad \varrho_2 = e^{2i\pi\alpha'}$$

und es liegt, da $\alpha - \alpha'$ keine ganze Zahl, ϱ_1 also von ϱ_2 verschieden ist, in der That der allgemeine Fall der kanonischen Substitution vor.

2.) Im Ausnahmefall erster Ordnung ist

$$(\mathfrak{P}^{\alpha}) = x^{\alpha} \mathfrak{p}(x) + \log x \,.\, x^{\alpha'-\alpha+k} \mathfrak{p}'(x),$$
$$\mathfrak{P}^{\alpha'-\alpha+k} = x^{\alpha'-\alpha+k} \mathfrak{p}'(x).$$

Bei Umlauf des x multipliciren sich sowohl $x^{\alpha}\mathfrak{p}(x)$, wie $x^{\alpha'}\mathfrak{p}'(x)$ mit derselben Constanten $\varrho = e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi\alpha'}$, während $\log x$ um $2i\pi$ wächst. Man sieht dadurch in der That, daß $(\mathfrak{P}^{\alpha})$ und $\mathfrak{P}^{\alpha'}$ eine parabolische Substitution, nämlich mit den Constanten

$$\varrho = e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi\alpha'}, \quad \sigma = 2i\pi \cdot e^{2i\pi\alpha}$$

erleiden.

3.) Im Ausnahmefall 2. Ordnung endlich heißen die Fundamentallösungen

$$\mathfrak{P}^{\alpha} = x^{\alpha} \mathfrak{p}(x), \quad \mathfrak{P}^{\alpha'} = x^{\alpha'-\alpha+k} \mathfrak{p}'(x).$$

In der That erleiden hier bei einem Umlaufe um 0 beide Lösungen eine Multiplication mit derselben Constanten

$$\zeta = e^{2i\pi\alpha} = e^{2i\pi\alpha'}$$

genau dem Ausnahmefall 2. Ordnung der kanonischen Substitution entsprechend.

Also können wir ganz allgemein den Satz aufstellen:

Die früher aufgestellten Fundamentalzweige liefern bei Umlaufung des Punktes 0 eine lineare Substitution, welche nicht nur schlechtweg ausgesprochen in kanonischer Form erscheint, sondern auch gerade in die Fälle 1/2/3 hineinpaßt, die wir bei der linearen Substitution aufgestellt haben.

Insbesondere geht das Auftreten von Logarithmen mit dem Auftreten parabolischer Substitutionen Hand in Hand:

Wir schließen hiermit unsere Betrachtungen betr: die Definition der hypergeometrischen Function von der Differentialgleichung aus, welche schließlich in der Auffassung der hypergeometrischen Function als Inbegriff der analytischen Fortsetzungen eines Anfangszweiges, sowie in den Begriffen: „Gruppe linearer Substitutionen" „kanonische Form der Substitution" ihren Höhepunkt fanden. Wir fügen hieran noch folgende allgemeinere Bemerkung:

Diese Behandlung der hypergeometrischen Function von der Differentialgleichung aus läßt sich im Wesentlichen ungeändert von der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nur 3 singulären Punkten, d.h. eben von der hypergeometrischen Differentialgleichung auf lineare Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung mit einer beliebigen Anzahl singulärer Punkte übertragen. Und so ist denn die Lehre von der hypergeometrischen Function eine Einleitung in die allgemeine Theorie derjenigen Functionen, welche durch lineare Differentialgleichungen definirt werden.

Wir wenden uns nunmehr zur Definition der hypergeometrischen Function durch

III. Bestimmte Integrale.

Ich werde heute zuerst eine Reihe allgemeinerer Vorbemerkungen geben.

Wir haben schon zu Anfang der Vorlesung die von Euler gefundene Beziehung zwischen der Function $F(a, b, c, x)$ und dem bestimmten Integral

$$\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a} \cdot du$$

kennen gelernt.

Euler hat sich aber auch noch mit einer andern einfacheren Classe bestimmter Integrale, die von ihm den Namen führen, besonders eingehend beschäftigt: ich meine die „Euler'schen Integrale erster und zweiter Art," welche folgende Definition und Bezeichnung führen:

$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du$, Euler'sches Integral 1. Art.

$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u}\,du$, Euler'sches Integral 2. Art.

Die Bezeichnung $B(p,q)$ ist durch die französischen Lehrbücher besonders verbreitet worden, und zwar wurde sie 1839 von Binet im Journ. de l'Éc. Pol. Cap. 27. zuerst eingeführt. Die Bezeichnung $\Gamma(p)$ stammt von Legendre (Exercises de calcul intégral 1811, spätere Ausgaben bekannt als Traité des fonctions elliptiques), während Gauß dieselbe Function nach dem Vorgang von Euler mit $\Pi(p-1)$ bezeichnet. (Disq. gen. circa ser. inf. 1812)

Wir beabsichtigen nun die sämtlichen in den obigen Formeln vorkommenden Buchstabengrößen als allgemeine complexe Veränderliche aufzufassen. Dabei ergibt sich aber, wenn wir an der obigen Schreibweise der Integrale festhalten, die Schwierigkeit,

dass für gewisse Gebiete der Variablen die Integrale notwendig unendlich werden und also ihre Bedeutung verlieren, ganz ähnlich, wie die Potenzreihen ausserhalb ihres Convergenzkreises.

Indem wir z. B. $\Gamma(p)$ durch das bestimmte Integral erklären, definiren wir dasselbe nur für solche Werte von p, deren reeller Teil > 0 ist, und ob für Werte von p, deren reeller Teil verschwindet oder negativ ist, eine Function $\Gamma(p)$ überhaupt definirt werden kann, bleibt völlig im Unklaren, insofern das Integral dann unterschiedslos unendlich wird.

[Vs. d. 23. Nov. 93]

Wir haben das vorige Mal einen Mangel in der gewöhnlichen Definition der Gammafunction durch ein bestimmtes Integral gefunden; diese Unvollkommenheit hat denn auch zu manchen Versuchen geführt, andere, weniger beschränkte Definitionen derselben Function zu Grunde zu legen, wie denn auch Gauss seine Π-Function durch ein unendliches Produkt definirt. Wir werden hierauf erst an einer späteren Stelle genauer eingehen, während ich heute zeigen will, wie man bei Beibehaltung der Integraldefinition die besagte Schwierigkeit doch heben kann. Es beruht dies Verfahren im

Wesentlichen auf Ideenbildungen Riemanns, die für diese Integrale von ihm selbst allerdings nur angedeutet worden sind und erst in neuerer Zeit weiter ausgebildet wurden.

Es handelt sich nämlich darum, statt der Wege von einem singulären Punkt in den andern hinein solche Wege zu setzen, welche um die singulären Punkte herumgehen, und längs deren der Integrand also nicht unendlich wird.

Bei dem Integral

$$\Gamma(p) = \int u^{p-1} e^{-u} du$$

erstreckt man in diesem Sinne die Integration statt von $0 - \infty$ (Fig. 1) vielmehr längs der in Fig. (2) dargestellten Schleife:

Fig. 1.

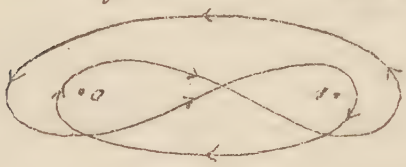
Dieses Schleifenintegral behält, wie man sieht, für alle beliebigen p eine gute Bedeutung. Dasselbe ist zuerst von Hankel in Bd. 9 von Schlömilch's Zeitschr. 1864 eingeführt worden.

Das Euler'sche Integral 1. Art:

$$B(p,q) = \int u^{p-1}(1-u)^{q-1} du,$$

welches bei Erstreckung von 0 bis 1 den Beschränkungen $R(p) > 0$ $R(q) > 0$.

unterliegt, erstreckt man längs des folgenden die Punkte 0 und 1 umgehenden geschlossenen Weges, eines sogenannten „Doppelumlaufs". Dieser ist durch folgende Eigenthümlichkeit gekennzeichnet:



Der Integrationsweg ist so eingerichtet, daß er sowohl den 0-Punkt als den Einheitspunkt das eine Mal in positivem Sinn, das andere Mal in negativem Sinn umkreist.

Wenn ich den 0-Punkt einmal in positivem Sinne umlaufe, so multiplicirt sich u^{p-1} mit einer gewissen Constanten, umlaufe ich ihn in negativem Sinne, so multiplicirt sich u^{p-1} mit dem reciproken Wert des ersten Multiplicators, so daß also u^{p-1} nach den beiden Umläufen sich reproducirt hat. Dasselbe geschieht mit $(1-u)^{q-1}$ längs des positiven und negativen Umlaufs um 1. Das Endresultat ist also folgendes:

Dieser geschlossene Weg hat die Eigenschaft, daß bei Durchlaufung desselben die zu integrirende Function schließlich sich reproducirt.

Dasselbe können wir etwas modernen folgendermaßen ausdrücken: wir denken uns über der u-

Ebene eine Riemann'sche Fläche construirt, auf welcher der Ausdruck $u^{p-1}(1-u)^{q-1}$ eindeutig ist. Dieselbe ist bei $0, 1, \infty$ verzweigt, und zwar hängen daselbst immer so viele Blätter cyclisch zusammen, als der Nenner der Zahl $p, q, p+q$ ergibt, bei irrationalem oder complexem Werte dieser Exponenten aber unendlich viele Blätter. Jedem Umlauf um einen der Verzweigungspunkte entspricht nun ein Übergang in ein anderes Blatt, und zwar im einen oder anderen Sinne, je nachdem der Umlauf in positivem oder negativem Sinne erfolgt.

Indem wir diese Riemann'sche Fläche construiren, ergibt sich als das Wesen des Doppelumlaufs, daß derselbe nicht nur in der u-Ebene, sondern auch auf der Riemann'schen Fläche einen geschlossenen Weg vorstellt.

Es ist nur ein Seitenstück zur Riemann'schen Definition der Perioden eines elliptischen oder Abel'schen Integrals, wenn wir einen solchen geschlossenen Integrationsweg auf der Riemann'schen Fläche einführen.

Riemann selbst hat hierüber nur Andeutungen gegeben. Man vergleiche hierüber die genauen Citate in Math. Ann. Bd. 38. Seite 148, 511, 512.

Der erste neuere Mathematiker, der wirklich solche Doppelumläufe benutzt ist C. Jordan in Paris in seinem „Cours d'analyse III." 1887, einem Buche, welches überhaupt von durchaus modernem Standpunkte aus die Dinge behandelt. Dann hat Nekrassoff in Moskau die Sache aufgenommen in einer Abhandlung, welche in Math. Ann. Bd. 38 in Übersetzung erschienen ist (1891). Endlich war Pochhammer in Kiel in den Jahren 1889–90 in Math. Ann. Bd. 35, 36, 37 schon selbständig auf die Benutzung des Doppelumlaufs gekommen; von ihm rührt auch diese Benennung unseres Integrationsweges her.*)

Diese Doppelumläufe werden wir in unserer Darstellung zur Geltung zu bringen haben. Außerdem wird uns aber noch ein zweites modernes Hülfsmittel vorzügliche Dienste leisten, nämlich die Anwendung der homogenen Variablen.

Wir setzen in das Euler'sche Integral erster Art für u den Quotienten $\frac{u_1}{u_2}$, für du also $u_2^{-2}(u_2 du_1 - u_1 du_2)$ und bekommen so:

---

*) Entsprechende Ansätze wird man bei solchen Functionen treffen können, die durch Doppelintegrale definirt sind; dabei sind die Auffassungen zu Grunde zu legen, welche Poincaré über Doppelintegrale im complexen Gebiete entwickelt hat (Acta Mathematica II, 188). Ich denke z.B. an die verallgemeinerten hypergeometrischen Reihen von Thomae cf. pag. 36. oben.

$$B(p,q) = \int u_1^{p-1}(u_2-u_1)^{q-1}u_2^{-p-q}(u_2\,du_1 - u_1\,du_2)$$

Dabei tritt nun deutlich hervor, daß der Integrand außer an den Stellen $u=0$ $(u_1=0)$, $u=1$ $(u_1=u_2)$ auch noch an der Stelle $u_2=0$, d. h. $u=\infty$ einen Verzweigungspunkt besitzt, und daß für die Stelle $u=\infty$ die Zahl $-p-q$ dieselbe Rolle spielt, wie für $u=0$ die Zahl $p-1$, für $u=1$ die Zahl $q-1$.

Noch deutlicher tritt die Gleichberechtigung der drei Verzweigungspunkte und ihrer Exponenten hervor, wenn wir die ersteren beliebig wählen und etwa eine Function geradezu durch das Integral definiren, welches längs eines Doppelumlaufs zu nehmen ist.

$$\int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(u_1\,du),$$

worin wir unter (ua) die Determinante $u_1a_2 - u_2a_1$ unter (u,du) den Differentialausdruck $u_1\,du_2 - u_2\,du_1$ verstehen. Dabei müssen wir aber die Exponenten α, β, γ, damit der Integrand ein Ausdruck 0ter Dimension sei, der durch $p-1, q-1, -p-q$ in der That erfüllten Bedingung unterwerfen:

$$\alpha + \beta + \gamma = -2.$$

Wir wiederholen das in folgendem Satz:

<u>Am deutlichsten tritt die Gleichberechtigung der drei singulären Punkte und überhaupt das Bildungsgesetz</u>

des Eulerschen Integrals erster Gattung hervor, indem wir von folgendem Integral beginnen:

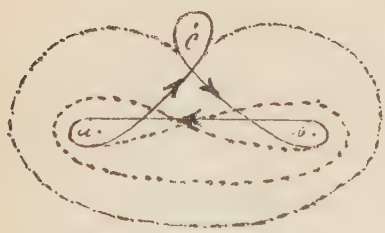
$$\int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(u, du),$$

wobei

$$\alpha + \beta + \gamma = -2$$

sein muß.

Nun aber scheint die Gleichberechtigung der drei Verzweigungspunkte durch die Auswahl unseres Integrationsweges als Doppelumlauf um die Punkte a und b wieder illusorisch zu werden. Indeß: Die nähere Betrachtung zeigt, daß auch unser Integrationsweg, der Doppelumlauf, die drei Punkte a, b, c gleichförmig berücksichtigt.



Derselbe ist nämlich im Wesentlichen nichts anderes, als eine Schleife, welche jeden der drei Punkte einmal in positivem Sinne umläuft. Deformirt man in der Figur die ausgezogene Schlinge um c zuerst in den punktirten Weg, diesen endlich in den gestrichelten, so erhält man in der That einen gewöhnlichen Doppelumlauf um a, b.

Es mögen hier noch einige Bemerkungen zur Geschichte der homogenen Variablen Platz finden.

Das Mittel des Homogenmachens nichthomogener Ausdrücke stammt ursprünglich aus der analytischen Geometrie, in welcher es zuerst von Plücker in Crelle's Journ. Bd. 5. 1830 angegeben und empfohlen worden ist.

Erst viel später, 1861 hat Aronhold in den Monatsberichten der Berliner Akademie die homogenen Variablen auch in die Functionentheorie eingeführt, nämlich in die Theorie der Abel'schen Integrale, woran sich dann die Arbeiten von Clebsch anschliessen.

Wir wollen nun dasselbe Princip der homogenen Schreibweise hier auf die Euler'schen Integrale, später auch auf die hypergeometrischen Integrale übertragen.

Die Theorie gewinnt dadurch einerseits den Vorzug größerer Allgemeinheit, andererseits treten bei der völligen Symmetrie der Betrachtungen gleichberechtigte Dinge in gleicher Form in die Erscheinung. Eine Darstellung in diesem Sinne liegt vor in der Dissertation von Schellenberg (Göttingen 1892), auf welche wir später noch ausführlicher eingehen werden. —

Heute beginnen wir mit einer näheren Betrachtung

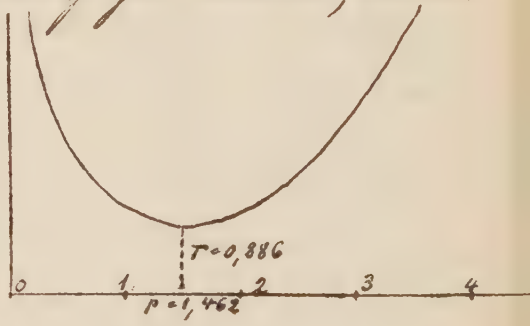
der T-Function, und wollen zuerst eine Uebersicht über die ältere Theorie geben, um dann zu sehen, wie sich dieselbe Sache mit dem vorgenannten neueren Hülfsmitteln angreifen läßt.

In Betr. der historischen Entwicklungen des Gegenstandes existirt eine Monographie von Brunel in den Mémoires de Bordeaux. sér III t. 3. 1886, welche sehr reichhaltig ist, in der aber merkwürdigerweise die Entwickelungen von Riemann und Henkel ganz übersehen werden.

Wir gehen von der für $R(p) > 0$ geltenden Definition

$$T(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du$$

aus, und versuchen uns zunächst einmal über die Werte der Function bei reellen positiven Werten von p eine Vorstellung zu machen, indem wir dieselben über den Abscissen p als Ordinaten auftragen. Wir gewinnen so die gezeichnete Curve, welche sich bei $p = 0$ ins Unendliche erhebt, etwa bei $p = 1,462$ mit dem Werte $T = 0,886$ ein Minimum erreicht, um dann mit wachsendem p immer steiler



anzusteigen. Für den Verlauf des gezeichneten Curvenzweiges existiren ausführliche Tabellen sowohl von Legendre, als von Gauß, letztere auf 20 Decimalen. Über die Berechnung der letzteren hat sich Gauß im Briefwechsel mit Bessel genauer ausgelassen. [Fr. d. 24. Nov. 93.]

In der Theorie der Γ-Function gibt es drei Sätze von fundamentaler Wichtigkeit

1.) Die „Functionalgleichung": $\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p)$

2.) Der „Complementensatz": $\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

3) Der „Gauß'sche Productensatz": $\Gamma(p)\Gamma(p+\frac{1}{n})\ldots\Gamma(p+\frac{n-1}{n}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{-np+\frac{1}{2}}\cdot\Gamma(np)$.

Dazu füge ich 4.) noch als Ergänzung einen von Hölder in Math. Ann. 28. 1886 bewiesenen Satz: Hölder hat gezeigt, daß die Γ-Function keiner algebraischen Differentialgleichung genügt.

Im übrigen machen wir zu den drei Hauptsätzen der Reihe nach folgende Bemerkungen:

Zu 1) Ist p eine ganze Zahl n, so folgert man aus der Functionalgleichung durch wiederholte Anwendung derselben:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot\Gamma(1)$$

Nun ist aber

$$\Gamma(1) = \int e^{-u}\,du = 1$$

also für ganzzahlige n:

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

Die Gammafunction verwandelt sich für ganzzahlige positive Argumentwerte in die gewöhnliche Facultät $(p-1)!$

Die ursprüngliche Entstehung der Gammafunction geht in der That historisch gerade auf die Aufgabe zurück, die Reihe der Facultäten zu interpoliren.*)

Wir müssen freilich der Genauigkeit halber bemerken, daß die genannte Interpolationsaufgabe an sich gar keine Function eindeutig festlegt.

Denn fügt man z. B. zu der Γ-Function irgend eine Function hinzu, welche für alle positiven ganzzahligen Werte des Arguments verschwindet, – etwa $\sin n\pi$ – so leistet die neue Function offenbar dasselbe, für alle positiven ganzzahligen n mit der Facultät übereinzustimmen.

2) Noch wichtiger für uns ist der Complementensatz:

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

Achten wir auf die rechte Seite dieser Gleichung, so sehen wir sofort, daß dieselbe für alle ganzzahligen positiven wie negativen Werte von p einschl. der 0 unendlich wird. Dasselbe muß also mit der linken Seite der Gleichung der Fall sein, d. h. die Unendlichkeitsstellen von $\Gamma(p)$ und $\Gamma(1-p)$ müssen

*) vgl. den Brief von Euler in Goldbach 1729, den Fuess 1843 in seiner Correspondance de quelques savants géométres du XVIII siècle publicirt hat.

sich gerade zur Reihe aller ganzen Zahlen ergänzen

$\Gamma(p)$								$\Gamma(1-p)$						
-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7

In der That werden wir lernen, daß $\Gamma(p)$ bei $0, -1, -2, \ldots$ und daß also $\Gamma(1-p)$ bei $+1, +2, +3, \ldots$ Unendlichkeitsstellen besitzt.

Fragen wir in gleicher Weise nach den 0-Stellen des Produkts $\Gamma(p)\Gamma(1-p)$, so kommt das auf die Frage hinaus, wann $\sin p\pi$ unendlich wird?

Die Antwort darauf lautet nun:

$\sin p\pi$ ist in der ganzen Ebene endlich, außer etwa bei $p=\infty$, wo es einen wesentlich singulären Punkt besitzt und sich jedem beliebigen Werte nähern kann.*) Das heißt aber für unsere Γ-Function:

Weder $\Gamma(p)$, noch natürlich auch $\Gamma(1-p)$ werden irgendwo in der Ebene der Variablen p gleich 0, außer etwa in dem wesentlich singulären Punkt $p=\infty$.

Wenn $\Gamma(p)$ nirgends verschwindet, so wird der reciproke Wert nirgends unendlich, außer ebenfalls wieder etwa für $p=\infty$. Dafür wird aber der reciproke Wert $=0$, wo $\Gamma(p)$ unendlich wurde; wir dürfen also in Weierstraß'scher Sprechweise uns ausdrücken:

*) nämlich je nach dem Wege, auf dem man den Punkt ∞ nähert.

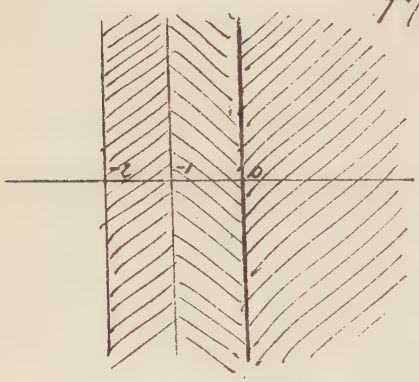
Der reciproke Wert von $\Gamma(p)$ ist eine ganze transcendente Function, welche bei $p = 0, -1, -2, \ldots$ verschwindet.

Da diese Function $\frac{1}{\Gamma(p)}$ in dieser Beziehung mit $\sin p\pi$ übereinstimmt, aber nur den einen Teil der 0-Stellen dieser Function besitzt, hat Betti für dieselbe den Namen „Halbsinus" vorgeschlagen.

Ehe wir all diese Sätze beweisen können, müssen wir $\Gamma(p)$ erst für beliebige complexe p definiren, welche nicht der Beschränkung $R(p) > 0$ unterworfen sind. Man hat dazu vorzüglich 3 Methoden benutzt.

1) Die Functionalgleichung

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\,\Gamma(p+1).$$



Durch das Integral ist eine Γ-Function für alle Werte des Argumentes erklärt, welche in der Halbebene rechts von der Axe der imaginären Zahlen sich befinden.

Die Function $\Gamma(p+1)$ ist daher außer für Werte der positiv reellen Halbebene auch noch für Werte von p erklärt, für welche

$$R(p) > -1$$

ist, also noch für einen Streifen innerhalb dessen die Function $\Gamma(p)$ links durch das Integral nicht erklärt werden kann.

Benutzen wir nun geradezu die Formel

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p}\Gamma(p+1)$$

zur Definition der Function $\Gamma(p)$, so haben wir damit eine solche Definition gewonnen, deren Gültigkeitsbereich gegen denjenigen der ursprünglichen Definition noch um einen Einheitsstreifen erweitert ist. In derselben Weise erweitern wir durch die Formeln

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p(p+1)}\Gamma(p+2),\ \Gamma(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}\Gamma(p+3) \text{ u. s. w.}$$

unsere Definition um zwei, drei u. s. w., kurz beliebig viele Einheitsstreifen gegenüber dem ursprünglichen.

Nun ist aber die Frage, ob diese Erweiterung der Definition durch die Functionalgleichung wirklich erlaubt ist, d. h. ob man dadurch wirklich <u>die analytische Fortsetzung</u> der ursprünglich definirten Function bekommt?

Wir wenden hierzu einfach den fundamentalen Grundsatz der Weierstraß'schen Functionentheorie an. Wir sehen nämlich, daß in dem Gebiete rechts von der Axe der imaginären Zahlen die beiden Functionen

$$\Gamma(p) \text{ und } \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

übereinstimmen, während die Werte von $\frac{\Gamma(p+1)}{p}$ indem-

Gebiete zwischen 0 und −1 die analytische Fortsetzung der Werte sind, welche $T\left(\frac{p+c}{p}\right)$ rechts von der imaginären Axe annimmt.

Nach dem Grundsatze der Functionentheorie, daß zwei Functionen, welche in einem endlichen Teil der Ebene übereinstimmen, auch in der Gesamtheit ihrer analytischen Fortsetzungen übereinstimmen, dürfen wir die Function $T(p)$ auch in dem Parallelstreifen links von der Axe der imaginären Zahlen mit $\frac{T(p+1)}{p}$ identisch setzen.

In dieser Weise können wir also das Definitionsgebiet der T-Funktion in der That beliebig erweitern.

Wir erkennen bereits hier, daß die Punkte $0, -1, -2 \ldots$ in der That Unendlichkeitspunkte der T funktion sind.

Denn setzen wir in der n mal wiederholten Functionalgleichung

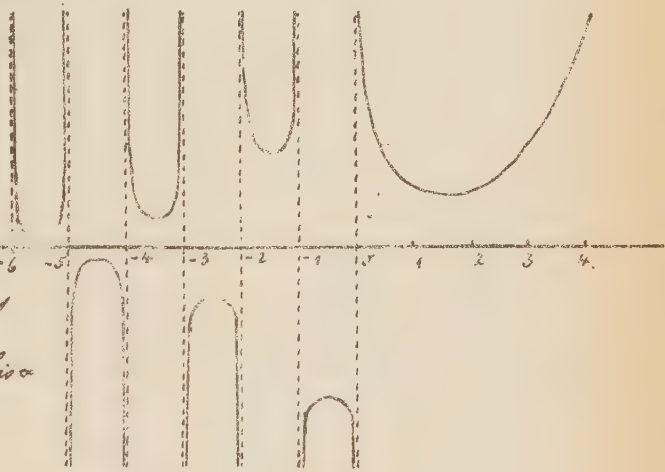
$$T(p) = \frac{T(p+n)}{p(p+1)\cdots(p+n-1)}$$

$p = 1-n$, so kommt für $n > 1$:

$$T(1-n) = \frac{1}{(1-n)(2-n)\ldots(n-n)} = \infty$$

Vermittelst der jetzt allgemeingültigen Functionalgleichung können wir nun den Verlauf der Function

für beliebige reelle p etwa aus dem bekannten Verlauf zwischen 0 und 1 berechnen, und durch eine Curve graphisch darstellen. Dieselbe wird etwa folgendes Aussehen haben, und zwar wird sie für $0, -1, -2, \ldots$ sich ins Unendliche erstrecken und zwischen diesen Stellen abwechselnd positive und negative Ordinaten haben.



Eine zweite Methode, die Function $\Gamma(p)$ für beliebige complexe p zu definiren ist die folgende:

Wir zerlegen das Integral in ein solches von 0 bis 1 und in ein solches von 1 bis ∞

$$\Gamma(p) = \int_0^1 u^{p-1} \cdot e^{-u} du + \int_1^\infty u^{p-1} e^{-u} du = P + Q.$$

Der Integrand des zweiten Teils Q wird nun im Integrationsintervall auf keinen Fall ∞ ist also für beliebige Werte von p erklärt, also

<u>Q ist in der ganzen p-Ebene definirt.</u>

Das Integral P dagegen formen wir zunächst unter der Voraussetzung $R(p) > 0$ um, indem wir den Integranden nach u in eine Potenzreihe entwickeln,

und dann gliedweise integriren. Wir finden:

$$\int_0^1 u^{p-1}\left(1-\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1\cdot 2}-\frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\right)du$$

$$=\left[\frac{1}{p}\cdot u^p-\frac{1}{1\cdot(p+1)}\cdot u^{p+1}+\frac{1}{1\cdot 2(p+2)}u^{p+2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(p+3)}u^{p+3}+\cdots\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{1(p+1)}+\frac{1}{1\cdot 2(p+2)}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(p+3)}+\cdots$$

Diese Reihe, welche rechts von der Axe der imaginären Zahlen mit dem Integral J übereinstimmt, convergirt auch in dem Gebiete links von der imaginären Axe, und stellt also dort die gesuchte analytische Fortsetzung des Integrals $\int_0^1 u^{p-1}e^{-u}du$ dar, und ergibt so mit A zusammen eine allgemeingültige Definition der Gammafunction.

<u>Wir definiren also $\Gamma(p)$ durch folgende Formel:</u>

$$\Gamma(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{1(p+1)}+\frac{1}{1\cdot 2(p+2)}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3(p+3)}+\cdots+\int_1^\infty u^{p-1}e^{-u}du,$$

in welcher nun die bei $0, -1, -2, \ldots$ liegenden Unendlichkeitsstellen unmittelbar ersichtlich sind.
[Mo. d. 27. Nov. 93.]

Die dritte allgemeingültige Definition der Γ-Function ist die Gauß'sche durch ein unendliches Product.

Man gelangt zu derselben am einfachsten, indem man die Γ-Function durch einen Grenzübergang

aus dem Euler'schen Integral erster Art

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1} du$$

hervorgehen läßt und dann q ganzzahlig annimmt. Man setze für $(q-1)$ der Kürze wegen n, schreibe also

$$B(p,n+1) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n \cdot du$$

Darin substituire man

$$u = \frac{v}{n},$$

wodurch das Integral übergeht in:

$$B(p,n+1) = n^{-p} \int_0^n v^{p-1}\left(1-\frac{v}{n}\right)^n \cdot dv.$$

Da nun für $\lim n = \infty$ $\left(1-\frac{v}{n}\right)^n = e^{-v}$ wird, so sieht man, daß $n^p \cdot B(p,n+1)$ für unendlich wachsende n gerade in das Eulersche Integral zweiter Art übergeht:

$$\Gamma(p) = \lim_{n=\infty}\left[n^p B(p,n+1)\right]$$

Die Γ-Function kann aus der B-function durch einen Grenzübergang abgeleitet werden.

Dieser Grenzübergang kann nun ebensowohl, wie durch stetiges Wachsenlassen von n, auch durch sprungweises Wachsenlassen von n ausgeführt werden, z. B. indem man n nur alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen läßt.

Für ganzzahlige n ist aber das Integral:

$$B(p, n+1) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^n du$$

leicht auszurechnen; man findet den Ausdruck:

$$\frac{n!}{p(p+1)\cdots(p+n)},$$

und also

$$\Gamma(p) = \lim_{n=\infty}\left[\frac{n!\, n^p}{p(p+1)\cdots(p+n)}\right]$$

Wir können Γ durch das vorstehende unendliche Produkt erklären, in welchem n unendlich groß zu nehmen ist.

Dieses unendliche Produkt tritt bereits 1729 in dem oben erwähnten Briefe von Euler an Goldbach auf, ist aber von Gauß in seiner Arbeit geradezu als Definition seiner Π-Function zu Grunde gelegt worden.

Das unendliche Produkt convergirt für beliebige endliche Werte von p, gibt also, da es für $R(p) > 0$ mit dem Euler'schen Integral zweiter Art übereinstimmt, wirklich eine allgemeingültige Definition der Γ-Function.

Unser Ausdruck wird endlich, wenn einer der Factoren des Nenners verschwindet, d. h. für $p = 0, -1, -2, \ldots$, er verschwindet dagegen für endliche Werte von p nirgends, da sein Zähler für endliche Werte von p nie verschwindet.

Für den reciproken Wert der Γ-Funktion ist die Sache natürlich umgekehrt, und wir dürfen also sagen:

Wir lesen aus der Produktdarstellung ohne Weiteres ab, dass $\frac{1}{\Gamma(p)}$ eine transcendente ganze Function ist, welche ihre Nullstellen bei $p = 0, -1, -2 \ldots$ liegen hat.

Desgleichen ergibt sich bei Gauß unmittelbar aus seiner Definition durch das unendliche Produkt die Functionalgleichung, der Complementensatz und der Produktensatz.

Aber noch mehr: Gauß zerlegt geradezu die Function $\frac{1}{\Gamma(p)}$ in „Primfactoren," d.h. er stellt sie als ein (unendliches) Produkt einzelner Factoren dar, von welchen jeder nur an einer der 0-Stellen der Function verschwindet, dasselbe, wofür später durch Weierstraß die allgemeinen Principien gegeben worden sind (Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen 1876, Abgedr. i.d. Abhandlungen aus der Functionenlehre S.1. 1886)

Man findet den einzelnen, etwa den νten Primfactor in unserm Falle am einfachsten, indem man in

$$\frac{1}{\Gamma_n(p)} = \frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n)}{n!\, n^p}$$

n der Reihe nach $= 1, 2, 3, \dots \nu-1, \nu$ setzt und den für $n = \nu$ erhaltenen Ausdruck durch den für $n = \nu - 1$ erhaltenen dividirt, indem man also setzt

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = \frac{1}{\Gamma_1(p)} \cdot \left(\frac{1}{\Gamma_2(p)} : \frac{1}{\Gamma_1(p)}\right) \cdot \left(\frac{1}{\Gamma_3(p)} : \frac{1}{\Gamma_2(p)}\right) \cdots \left(\frac{1}{\Gamma_\nu(p)} : \frac{1}{\Gamma_{\nu-1}(p)}\right) \cdots$$

Der ν te Factor heißt, wie man ausrechnet

$$\frac{p+\nu}{\nu} \cdot \frac{(\nu-1)^p}{\nu^p} = \left(1 + \frac{p}{\nu}\right) \cdot \frac{(\nu-1)^p}{\nu^p}$$

und das Produkt also

$$\frac{1}{\Gamma(p)} = p \cdot \left(1 + \frac{p}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{2}\right) \frac{1^p}{2^p} \cdot \left(1 + \frac{p}{3}\right) \frac{2^p}{3^p} \cdots \left(1 + \frac{p}{\nu}\right) \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^p \cdots$$

Dabei ist aber der Factor $\frac{(\nu-1)^p}{\nu^p}$ wohlverstanden von $1 + \frac{p}{\nu}$ untrennbar.

Mit dieser bei Gauß vorkommenden Formel haben wir thatsächlich eine Zerlegung der ganzen Function $\frac{1}{\Gamma(p)}$ in Primfactoren geleistet.

Nunmehr können wir zu einer unserer früheren Entwicklungen den damals aufgeschobenen Beweis leicht nachtragen. Wir haben nämlich aus den relationes inter contiguas gefunden, daß die Gauß'sche Reihe für den Wert 1 ihres vierten Arguments sich durch folgendes unendliche Produkt darstellt: (S 24)

$$F(a, b, c, 1) = \lim_{k=\infty} \frac{(c-a) \cdots (c-a+k) \cdot (c-b) \cdots (c-b+k)}{c \cdots (c+k) \cdot (c-a-b) \cdots (c-a-b+k)}$$

wobei

$R(c-a-b) > 0$ vorausgesetzt war.

Wir schreiben dies folgendermaßen um:

$$= \lim_{k=\infty} \left\{ \frac{\dfrac{k^{c} \cdot k!}{c(c+1)\cdots(c+k)} \cdot \dfrac{k^{c-a-b} k!}{(c-a-b)(c-a-b+1)\cdots(c-a-b+k)}}{\dfrac{k^{c-a} \cdot k!}{(c-a)(c-a+1)\cdots(c-a+k)} \cdot \dfrac{k^{c-b} \cdot k!}{(c-b)(c-b+1)\cdots(c-b+k)}} \right\},$$

in welchem Ausdruck die neu hinzugefügten Faculäten und Potenzen von k sich offenbar gerade gegenseitig aufheben.

Unsere Productdefinition für die Γ-Function hierin eingeführt ergibt nun in der That genau, wie an jener Stelle behauptet wurde:

$$F(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c) \cdot \Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a) \cdot \Gamma(c-b)}.$$

Dies ists, was wir über die ältere Theorie der Γ-Function haben berichten wollen. Natürlich ist dieser Bericht durchaus nicht vollständig, doch um rascher zu eignen Untersuchungen vorwärts zu kommen, müssen wir es uns versagen, noch auf viele sehr merkwürdige Eigenschaften der Γ-Function einzugehen, welche durch die älteren Methoden entdeckt worden sind.

Wir wollen nunmehr an Stelle des von 0 nach ∞ verlaufenden geradlinigen Integrationsweges einen den 0-Punkt umgehenden <u>schleifenförmigen Integrationsweg</u>

setzen, wir wollen also jetzt von dem Schleifenintegral sprechen, welches wir mit

$$\int_{\mathfrak{S}} u^{p-1} e^{-u} du$$

bezeichnen wollen.

Dieses Schleifenintegral hat nun im Gegensatz zu dem früher betrachteten für beliebige p eine gute Bedeutung. Für $R(p) > 0$ wollen wir es nun mit dem unter dieser Bedingung ebenfalls vernünftigen Integral

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty u^{p-1} e^{-u} du$$

vergleichen.

Dabei müssen wir uns vor allen Dingen vergegenwärtigen, daß im Allgemeinen die Potenz u^{p-1} im Integranden vieldeutig ist. Es ist nämlich:

$$u^{p-1} = e^{(p-1)\log u},$$

und $\log u$ ist nur bis auf ganzzahlige Multipla von $2\pi i$ erklärt.

Wir können nun aber unseren Integrationsweg in einen von $+\infty$ nach einem kleinen positiven Werte ρ längs der reellen Axe verlaufenden Weg, in eine

negative Umkreisung des 0-Punktes und in einen längs der reellen Axe von ρ nach $-\infty$ verlaufenden

Integrationsweg deformiren.

Wir setzen jetzt fest, daß längs des oberen geradlinigen Stückes dieses Weges von ξ bis $+\infty$ unter $\log u$ sein <u>Hauptwert</u>, d.h. der reelle Wert desselben verstanden werden soll, den wir mit $(\log. u)$ bezeichnen wollen. Dann müßen wir, da wir zu dem andern, unteren geradlinigen Teile des Integrationsweges vermittelst einer positiven Umkreisung des 0-Punktes gelangen, bei der der Logarithmus um $2\pi i$ wächst, daselbst

$$\log u = (\log u) + 2\pi i$$

setzen.

Wenn wir nun unter der Voraussetzung $R(p) > 0$ ξ gegen 0 abnehmen lassen, so liefert der obere Teil des Integrationsweges den Beitrag

$$+\int_0^\infty u^{p-1} \cdot e^{-u} du = +\Gamma(p),$$

der untere Teil den Beitrag

$$-e^{2i\pi(p-1)} \int_0^\infty u^{p-1} \cdot e^{-u} du = -e^{-2i\pi p} \cdot \Gamma(p),$$

der Kreis um den 0-Punkt, weil der Integrand für $u=0$ endlich bleibt, den Beitrag 0.

Daraus ergibt sich also das Resultat, daß für $R(p) > 0$ das Schleifenintegral mit

$$(1 - e^{2i\pi p}) \cdot \Gamma(p)$$

übereinstimmt. Dieselbe Uebereinstimmung muß

auch in den übrigen Teilen der p-Ebene herrschen, wenn wir $\Gamma(p)$ statt durch das geradlinige Integral von 0 bis ∞ durch eine der angegebenen allgemeingültigen Definitionen für die ganze Ebene analytisch fortsetzen, d. h.

<u>Das Schleifenintegral ist allgemein $=(1-e^{2i\pi p})\Gamma(p)$.</u>

Wir formen diesen so erhaltenen Ausdruck noch etwas um: wir schreiben:

$$(1-e^{2i\pi p})\Gamma(p) = 2i \cdot e^{i\pi p} \cdot \frac{e^{-i\pi p} - e^{+i\pi p}}{2i} \Gamma(p)$$

$$= -2i \cdot e^{i\pi p} \cdot \sin \pi p \cdot \Gamma(p).$$

Nun ziehen wir die Complementenformel heran:

$$\sin \pi p = \frac{\pi}{\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p)}$$

und erhalten so:

$$\int_{\mathfrak{C}} u^{p-1} \cdot 2^{-u} \cdot du = \frac{-2i\pi \cdot e^{i\pi p}}{\Gamma(1-p)};$$

d. h.

<u>Unser Schleifenintegral ist abgesehen von dem Factor im Zähler direct gleich der transcendenten ganzen Function $\frac{1}{\Gamma(1-p)}$, welche für $p = 1, 2, 3 \ldots$ verschwindet.</u>

Damit haben wir das Schleifenintegral auf die

von früher her bekannte historisch gegebene Γ-Function zurückführt. Wir können aber die Betrachtung umkehren, und direct das Schleifenintegral von seiner Definition aus auf seine Eigenschaften untersuchen.

Erstens sieht man dem Schleifenintegral ohne Weiteres an, dass dasselbe eine bestimmte eindeutige ganze Function von p definirt, vorausgesetzt, dass man sich über die genauere Bedeutung von u^{p-1} entlang dem Integrationsweg geeinigt hat. (Würden wir die Verabredung ändern, so würde das bedeuten, dass der Factor $e^{2i\pi p}$ in einer beliebigen ganzzahligen Potenz hinzuträte.)

Aber noch mehr: Wenn $p-1=0$ oder eine positive ganze Zahl ist, dann ist der 0-Punkt für den Integranden weder ein ∞-Punkt, noch ein Verzweigungspunkt. Der Integrand besitzt dann auf der obern und auf der untern Seite der reellen Axe dieselben Werte, so dass sich die geradlinigen Teile des Integrationsweges in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben. Zugleich liefert die Umkreisung des 0-Punktes keinen Beitrag, und das Gesamtintegral verschwindet also.*)

*) Wir könnten auch sagen: Wir dürfen hier den Integrations-

Damit haben wir die Nullpunkte unserer Function gefunden. Wir sagen zusammenfassend:
Hätten wir in solcher Weise mit dem Schleifenintegral begonnen, so würden wir nicht Γ, sondern $\frac{1}{\Gamma}$ als fundamentale Function von vornherein eingeführt haben, was auch viel rationeller wäre.

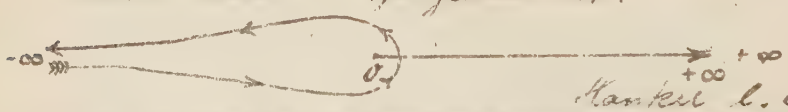
Wir sind in der letzten Stunde von unserm Schleifenintegrale aus zu der Function

$$-\frac{2i\pi \cdot e^{i\pi p}}{\Gamma(1-p)}$$

gelangt; ich will heute noch als Ergänzung hierzu angeben, wie man durch eine Modification des Integranden und des Integrationsweges (Substitution $u = -u'$; $p-1 = -p'$) auch unmittelbar zu der ganzen Function $\frac{1}{\Gamma(p)}$ selbst gelangen kann: nämlich es ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int u^{-p} e^{u} \cdot du = \frac{1}{\Gamma(p)},$$

wobei die Schleife des Integrationsweges von $-\infty$ in positivem Sinne um den 0-Punkt herum wieder nach $-\infty$ zu ziehen ist:



So hat es Hankel l. c. vorgeschlagen.

*) weg über den Nullpunkt, der überhaupt kein singulärer Punkt mehr ist, einfach wegziehen, also auf den Punkt $+\infty$ zusammenziehen. das Integral verschwindet also.

Im Uebrigen wenden wir heute unsere Aufmerksamkeit der B-Function zu.

Wir haben die alte Definition

$$B(p,q) = \int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}\,du \qquad \begin{array}{l} R(p) > 0, \\ R(q) > 0. \end{array}$$

Hierbei liegt dieselbe Unbestimmtheit in der Definition des Wertes von u^{p-1} und zugleich von $(1-u)^{q-1}$ vor, wie früher bei der Γ-Function.

Je nachdem wir entlang unserm Integrationsweg die Potenzen u^{p-1} und $(1-u)^{q-1}$ definiren wollen, modificirt sich die Definition der B-Function um einen Exponentialfactor $e^{2i\pi(\sigma p + \tau q)}$, unter σ, τ beliebige ganze Zahlen verstanden.

Aus den Lehrbüchern lernt man die B-Function auf Γ-Functionen zurückzuführen durch die Formel:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

welche bereits von Euler gefunden worden ist.

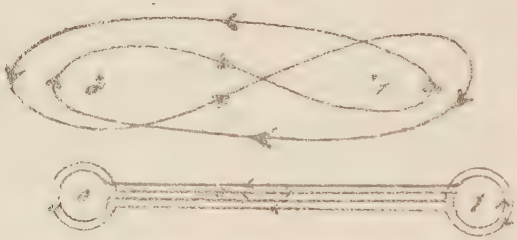
Diese Formel gestattet mit einem Schlage, die Function $B(p,q)$ für beliebige complexe Werte von p und q zu erklären.

Zugleich zeigt die Formel, daß B keine selbstständige Transcendente ist, die man eigens in die Analysis einzuführen hätte, vielmehr kommt

sie auf die Γ-Function zurück.

Wir wollen nun hier die genannte Formel nicht besonders ableiten, sondern vielmehr zusehen, wie sie sich modificirt, wenn wir erst den Doppelumlauf und schließlich auch die homogene Schreibweise einführen.

Unserm Doppelumlauf können wir auf 4 geradlinige Stücke von 0 bis 1 und je zwei Umkreisungen der Punkte 0 und 1 zusammenziehen, wie folgende Figur zeigt:



Setzen wir fest, daß Lage des mit einem Federpfeil bezeichneten Wegstückes die 3. Grund reell und positiv angenommen wurde. Er multiplicirt sich bei der ersten positiven Umkreisung von 1 mit $e^{2i\pi \cdot q}$, bei der darauf folgenden positiven Umkreisung von 0 mit $e^{2i\pi p}$, dann bei der negativen Umkreisung von 1 mit $e^{-2i\pi q}$, um dann bei der negativen Umkreisung von 0 durch Multiplication mit $e^{-2i\pi p}$ wieder seinen ursprünglichen Wert anzunehmen.

Die 4 geradlinigen Wegstücke geben also, wenn man, $R(p)>0$, $R(q)>0$ vorausgesetzt, die Kreise um 0 und 1 auf die Punkte selbst zusammenzieht, zusammen den Wert:

$$\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du - e^{2i\pi q}\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du$$

$$+e^{2i\pi(p+q)}\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du - e^{2i\pi p}\int_0^1 u^{p-1}(1-u)^{q-1}du,$$

worin in allen Integralen für den Integranden der positive reelle Wert zu setzen ist.

D. h., es wird

$$\int u^{p-1}(1-u)^{q-1}du = (1-e^{2i\pi p})(1-e^{2i\pi q})\,B(p,q).$$

Dieser für $R(p)>0$, $R(q)>0$ geltende Zusammenhang zwischen dem Doppelumlaufintegral und der B-Function gilt, da das Integral auch für allgemeine p, q Bedeutung behält, und $B(p,q)$ ebenfalls sich allgemein definiren läßt, ganz allgemein.

Wir setzen den Ausdruck in derselben Weise um, wie früher bei dem der Γ-Function entsprechenden Schleifenintegral. Wir setzen zuerst:

$$(1-e^{2i\pi p})(1-e^{2i\pi q})\cdot B(p,q) = -4e^{i\pi(p+q)}\cdot\sin\pi p\cdot\sin\pi q\cdot B(p,q)$$

und finden weiter mit Rücksicht auf die Formeln:

$$\sin\pi p = \frac{\pi}{\Gamma(p)\Gamma(1-p)},\quad \sin\pi q = \frac{\pi}{\Gamma(q)\Gamma(1-q)},\quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

folgenden Ausdruck für das Doppelumlaufsintegral:

$$\int u^{p-1}(1-u)^{q-1}\cdot du = \frac{-4\pi^2\cdot e^{i\pi(p+q)}}{\Gamma(1-p)\cdot\Gamma(1-q)\cdot\Gamma(p+q)}.$$

Das Doppelumlaufsintegral erweist sich so als eine eindeutige transcendente ganze Function von p und q, welche für $p = 1, 2, 3, \ldots$ für $q = 1, 2, 3, \ldots$ und für $p + q = 0, -1, -2, \ldots$ verschwindet, entsprechend den Unendlichkeitsstellen der im Nenner stehenden Γ-Factoren.

Diesen Satz hätten wir nun ebenso wie früher bei dem der Γ-Function entsprechenden Schleifenintegral unmittelbar aus der Form unseres Doppelumlaufsintegrals ablesen können:

Erstens ist klar, daß das Doppelumlaufsintegral bei getroffener Festsetzung über den Wert des Integranden eine eindeutige ganze (transcendente) Function von p und q ist.

Daß ferner das Doppelumlaufsintegral für $p = 1, 2, 3 \ldots$ verschwindet, ergibt sich sofort, wenn man bemerkt, daß $u = 0$ dann kein singulärer Punkt des Integranden mehr ist, daß man also den ganzen Doppelumlauf auf den Einheitspunkt zusammenziehen kann, der dann, positiv und negativ hinter-

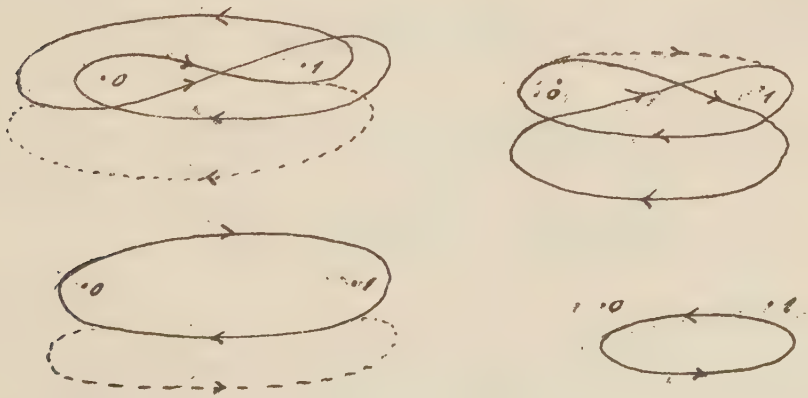
einander umkreist, 0 liefert.

In derselben Weise sieht man ein, daß das Integral auch für $q = 1, 2, 3 \ldots$ verschwindet.

Schreiben wir endlich das Integral homogen:

$$-\int_{\infty} u_1^{p-1}(u_2-u_1)^{q-1}u_2^{-p-q}(u_1\,du_2-u_2\,du_1);$$

so sehen wir unmittelbar, daß für $p+q=0,-1,-2,\ldots$ der unendlich ferne Punkt $u_2=0$ seinen singulären Charakter verliert, daß man dann also den Integrationsweg durchs Unendliche hindurch deformieren kann; dadurch kann man ihn aber in eine gewöhnliche keinen singulären Punkt enthaltende Schlinge, schließlich auf einen beliebigen Punkt zusammenziehen, etwa wie die Reihenfolge folgender Figuren zeigt:



Längs eines solchen Weges muß das Integral natürlich verschwinden. Also:

Das Verschwinden des Doppelumlaufsintegrals für die Werte $p+q=0, -1, -2, \ldots$ kommt ebenfalls ganz einfach heraus, weil für diese Werte der Unendlichkeitspunkt seinen singulären Charakter verliert.

Alles was wir aus der modificirten Euler'schen Formel entnommen haben, verificirt sich also sofort am Doppelumlaufsintegral selbst.*)

(Wie aber erkennt man aus dem Doppelumlaufsintegral, daß B (oder auch $\frac{1}{\Gamma}$) keine anderen Nullpunkte besitzt als die angegebenen?)

Wir wollen nun unser homogenes Integral noch symmetrischer schreiben. Wir setzen zunächst:

$$p-1=\alpha, \quad -p-q=\beta, \quad q-1=\gamma,$$

so daß also $\alpha+\beta+\gamma=-2$ ist. Dann können wir schreiben (nach Multiplication mit -1):

$$\int u_1^{\alpha} u_2^{\beta}(u_2-u_1)^{\gamma}(u_1\,du_2-u_2\,du_1)=\frac{4\pi^2 \cdot e^{-i\pi\beta}}{\Gamma(-\alpha)\cdot\Gamma(-\beta)\cdot\Gamma(-\gamma)},$$

oder, indem wir mit

$$(-1)^{\beta}=e^{i\pi\beta}$$

multipliciren:

$$\int u_1^{\alpha}(-u_2)^{\beta}(u_2-u_1)^{\gamma}(u_1\,du_2-u_2\,du_1)=\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\cdot\Gamma(-\beta)\cdot\Gamma(-\gamma)}.$$

Auf der rechten Seite haben wir jetzt vollständige Symmetrie. Um auch links völlige Symmetrie zu erhalten, führen wir statt u_1, u_2 durch eine lineare binäre Substitution andere Variablen v_1, v_2 ein, derart daß für $u = \frac{u_1}{u_2} = 0, \infty, 1$ der Quotient $v = \frac{v_1}{v_2}$ die Werte a, b, c annimmt. Zugleich führen wir für a, b, c homogene Coordinaten $a_1, a_2;\ b_1, b_2;\ c_1, c_2$ ein.

Wir setzen nämlich

$$u_1 = (va) \cdot (bc),$$
$$-u_2 = (vb) \cdot (ca).$$

Mit Hülfe der bekannten Identität:

$$(va)(bc) + (vb)(ca) + (vc)(ab) = 0$$

ergibt sich sofort

$$u_2 - u_1 = (vc)(ab).$$

Ferner ist:

$$u_1\, du_2 - u_2\, du_1 = (bc)(ca)\left\{-(va)(dv, b) + (vb)(dv, a)\right\}$$

$$= (bc)(ca)\left\{(va)(b, dv) + (vb)(dv, a)\right\},$$

woraus wieder vermöge der Identität

$$(va)(b, dv) + (vb)(dv, a) + (v, dv)(ab)$$

folgt:

$$u_1\, du_2 - u_2\, du_1 = -(v, dv) \cdot (bc)(ca)(ab).$$

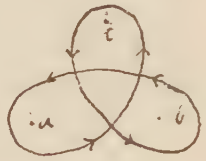
Unser Integral nimmt also die Gestalt an:

$$-(bc)(ca)(ab)\int_{\mathfrak{L}}((va)(bc))^{\alpha}((vb)(ca))^{\beta}((vc)(ab))^{\gamma}(v,dv),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$-(bc)^{\alpha-1}(ca)^{\beta+1}(ab)^{\gamma-1}\int_{\mathfrak{L}}(va)^{\alpha}(vb)^{\beta}(cc)^{\gamma}(v,dv):$$

Diese Integrale sind, wie bereits angedeutet längs einer Kleeblattschleife zu erstrecken, welche jeden der gleichberechtigten drei singulären Punkte a, b, c in positivem Sinn umkreist.



Unser Integral, dessen Wert nach der Euler'schen Formel sich so darstellt.

$$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(-\beta)\,\Gamma(-\gamma)}$$

läßt sich unter Einführung dreier beliebigen Punkte a, b, c in der symmetrischen Form schreiben:

$$-(bc)^{\alpha+1}(ca)^{\beta+1}(ab)^{\gamma+1}\int_{\mathfrak{L}}(va)^{\alpha}(vb)^{\beta}(vc)^{\gamma}(v,dv).$$

Infolge der vor dem Integralzeichen stehenden Potenzen von $(bc), (ca), (ab)$ ist der Ausdruck in der That auch in Bezug auf a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 je vom Grade 0; daß er gar nicht von den a, b, c abhängt, ergibt sich aus seinem Verhalten bei linearer Substitution.

[Do. d. 30. Nov. 93.]

In der symmetrischen Form der Eulerschen Relation, die ich in der letzten Stunde angegeben habe, ist die rechte Seite von den Punkten a, b, c ganz unabhängig; d.h. die Punkte a, b, c kommen auf der linken Seite nur <u>scheinbar</u> vor. In moderner Weise können wir diese Thatsache auch in folgender Weise ausdrücken und beweisen:

Wir führen statt u_1, u_2 zwei neue Variablen u_1', u_2' vermöge der linearen Substitution

$$u_1' = r_{11}\, u_1 + r_{12}\, u_2, \qquad \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = r$$
$$u_2' = r_{21}\, u_1 + r_{22}\, u_2,$$

in das Integral ein, zugleich vermöge derselben Substitution statt a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 die Größen a_1', a_2'; b_1', b_2'; c_1', c_2'; dann wird

$$(u'a') = (ua)\cdot r,\ (u'b') = (ub)\cdot r,\ (u'c') = (uc)\cdot r,$$
$$(b'c') = (bc)\cdot r,\ (c'a') = (ca)\cdot r,\ (a'b') = (ab)\cdot r,$$
$$(u', du') = (u, du)\cdot r.$$

Alle diese Determinanten multipliciren sich also bei simultaner Substitution der verschiedenen Variablenpaare je mit der ersten Potenz der Substitutionsdeterminante r; d.h.

<u>Die Größen $(ua)\cdots(bc)\cdots(u\,du)$ sind Invarianten vom Gewichte 1.</u>

Der Integrand unseres Integrals einschließlich des davorstehenden Factors besteht aber aus lauter solchen Invarianten als Factoren; ist daher selbst eine Invariante der Größenpaare $u_1 u_2$; $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$, und zwar wie man sieht, eine solche vom Gewichte 0, d. h. Der Integrand ist eine absolute simultane Invariante der 4 Variablenpaare $u_1 u_2$; $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$.

Nachdem wir aber für $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$; $u_1 u_2$, wie es jetzt ohne Weiteres erlaubt ist, die Größen $a_1' a_2'$; $b_1' b_2'$; $c_1' c_2'$; $u_1' u_2'$ gesetzt haben, dürfen wir für die Integrationsbuchstaben $u_1' u_2'$ natürlich die andere Benennung $u_1 u_2$ wieder einführen. D. h. unser Integral bleibt ungeändert, wenn man für $a_1 a_2$; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$ die linearen Functionen $a_1' a_2'$; $b_1' b_2'$; $c_1' c_2'$ setzt.

Nach seiner Zusammensetzung aus lauter Determinantenfactoren erweist sich unser Integral als eine absolute Invariante der drei Punkte a, b, c, die ungeändert bleibt, wenn wir a, b, c simultan irgend einer linearen Substitution unterwerfen.

Eine absolute Invariante dreier Punkte kann aber, da man ja durch eine geeignete Substitution irgend drei Punkte immer in drei beliebige andere

Punkte transformiren kann, nur eine numerische Constante sein, welche von der Lage der drei Punkte gar nicht abhängt

Hiermit stimmt, daß unser Integral von den a, b, c gar nicht abhängt, denn wir können ja die Punkte a, b, c durch lineare Transformation in irgend drei andere Punkte verwandeln.

Diese ganze Betrachtungsweise haben wir heute nur angeführt, weil wir später für höhere Fälle ganz entsprechende Betrachtungen anstellen müssen.

Rationell wäre es nun, von unserm Doppelumlaufintegral ausgehend den Zahlenwert unserer absoluten Invariante festzulegen, wie es Schellenberg ausgeführt hat.

Hier aber wollen wir unsere symmetrische Formel nur dazu benutzen, um uns über die systematische Stellung der Euler'schen Integrale gewisse allgemeine Ideen zu bilden.

Das Euler'sche Integral erster Art enthält unter dem Integralzeichen ein Product von drei Determinantenfactoren (ua), (ub), (uc), jeden zu einer bestimmten Potenz erhoben. Wir haben nun keinen Grund uns auf die Zahl 3 solcher Factoren zu beschränken. Wir nehmen eine beliebige Zahl, etwa n

scener Factoren an und untersuchen also, was wir einerseits für $n=1, 2$, andererseits für $n=4, 5 \ldots$ für Functionen durch unser Integral definiren, wobei wir uns noch für jeden dieser Fälle einen Grenzübergang vorbehalten, wie derjenigen, der von der B-Function zur Γ-Funktion führt, d. h. ein unendliches Wachsenlassen eines oder mehrerer Exponenten.

1.) Wir finden für $n=1$ das Integral

$$\int (ua)^{-2} \cdot (u\, du)$$

Der Integrand besitzt nur den einen singulären Punkt a. Den geschlossenen Integrationsweg kann man daher, wie er auch verlaufen möge, stets durch das Unendliche hindurch auf einen gewöhnlichen Punkt zusammenziehen, wir erhalten daher als Wert des Integrals 0.

2.) Für $n=2$ haben wir das Integral

$$\int (ua)^{\alpha} (ub)^{-\alpha-2} (u, du).$$

Der Doppelumlauf um a und b läßt sich, wie früher gezeigt, da das Unendlichferne nicht singulär ist, unmittelbar Eiporation durch ∞ auf einen gewöhnlichen Punkt zusammenziehen, so daß auch für $n=2$ das Integral verschwindet.

3.) Für $n=3$ bekommen wir als ersten Fall eines nicht verschwindenden Integrals die B-Function.

4.) Für $n=4$ haben wir das Integral zu betrachten:

$$\int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(ud)^{\delta}(u,du),$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2$$

welches längs irgend einer geschlossenen Curve zu erstrecken ist, längs deren der Integrand sich reproducirt.

Offenbar ist das hypergeometrische Integral

$$\int u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\,du$$

mit den Verzweigungspunkten $0, \infty, 1, \frac{1}{x}$ ein Integral dieser Art, und wir werden bald sehen, wie sich sogar jedes Integral dieser Art auf das hypergeometrische zurückführt. Wir würden uns also für die Euler'schen Integrale mit beliebiger Zahl der Verzweigungspunkte etwa folgende Tabelle entwerfen können:

Euler'sche Integrale:

1) $n=1;\ \int (ua)^{-2}(u\,du)=0$

2) $n=2;\ \int (ua)^{-2}(ub)^{-\alpha-2}(u,du)=0$

3) $n=3;\ \int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(u,du)=$ B-Function, $\alpha+\beta+\gamma=-2$

4) $n=4;\ \int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(ud)^{\delta}(u,du)=$ Hypergeomet. Function, $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2$

5) $n=5;$ — — —

⋮

n) $n=n;\ \int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}\cdots(um)^{\mu}(u,du)$, $\alpha+\beta+\cdots+\mu=-2$

Vorbehaltlich Grenzübergang für unendlich wachsende Exponenten.

Bei dieser systematischen Aufzählung der Euler'schen Integrale macht das Integral B den Anfang, und es folgt

dann das hypergeometrische Integral, mit dem wir uns ohnehin hier beschäftigen wollten.

Nun wollen wir noch zusehen, zu welcher Art von Integralen wir durch den noch in Aussicht genommenen Grenzübergang gelangen. Ich verlasse dabei die homogene Schreibweise.

Es mögen in 2 Factoren, etwa in

$$(u-a)^{\alpha}(u-b)^{\beta},$$

die beiden Stellen a und b einander unendlich nahe rücken (wie beim Uebergang von B zu T die Stellen 1 und ∞), und gleichzeitig α und β unendlich wachsen, doch so, daß $\alpha+\beta$ sich der endlichen Grenze α' nähert. Ich setze

$$b = a - \varepsilon,$$

$$\left.\alpha = \alpha' - \frac{a_1}{\varepsilon},\ \beta = +\frac{a_1}{\varepsilon}\right\}\ \lim.\ \varepsilon = 0.$$

Es wird dann

$$\lim(u-a)^{\alpha}(u-b)^{\beta} = \lim(u-a)^{\alpha'-\frac{a_1}{\varepsilon}}(u-a+\varepsilon)^{+\frac{a_1}{\varepsilon}} = (u-a)^{\alpha'}\lim\left(1+\frac{\varepsilon}{u-a}\right)^{a_1}$$

$$= (u-a)^{\alpha'}.e^{\frac{a}{u-a}}$$

Noch allgemeiner durch Zusammenrückenlassen von mehr als zwei singulären Punkten unter geeignetem unendlichen Wachsen der Exponenten erhält man Factoren der Gestalt:

$$(u-a)^{\alpha}.e^{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\frac{a_\varrho}{(u-a)^{\varrho}}}$$

(wobei wir in üblicher Weise für $a = \infty$ unter $u - a$ den Ausdruck $\frac{1}{u}$ zu verstehen haben).

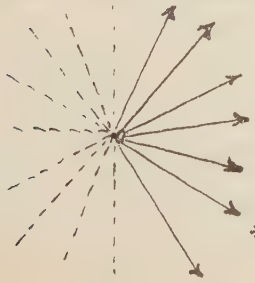
Wir werden so zu folgendem Typus von Integralen, den allgemeinsten „Eulerschen Integralen" *), geführt:

$$\int (u-a)^{\alpha} \cdot e^{\sum^{t} \frac{a_\varrho}{(u-a)^\varrho}} \cdot (u-b)^{\beta} \cdot e^{\sum^{s} \frac{b_\sigma}{(u-b)^\sigma}} \cdots\cdots (u-n)^{\nu} \cdot e^{\sum^{t} \frac{n_\tau}{(u-n)^\tau}} du.$$

Wir fragen nun, was für Integrationswege wir bei diesen allgemeinsten Integralen in Betracht zu ziehen haben, indem wir uns dabei immer die bei der Γ-Function vorliegenden Verhältnisse vor Augen halten.

Dort ließen wir den Integrationsweg im Punkte ∞ beginnen, den 0-Punkt umkreisen und wieder im Punkt ∞ endigen. Dabei war es aber wesentlich,

daß der Integrationsweg dem unendlich fernen Punkte nur in einer solchen Richtung sich näherte, bezw. von ihm auslief, daß in den unendlich fernen Teilen des Integrationsweges der reelle Teil von u positiv unendlich, der Integrand $u^{p-1} \cdot e^{-u}$ also unendlich klein wurde.



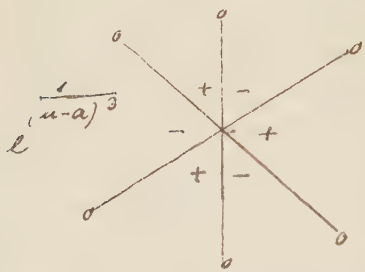
Statt der von uns gewählten Richtung der positiven reellen Zahlen selbst hätten wir für Ausgangs- wie für Rückkehrrichtung des Integrationsweges je eine

*) wenn ich vorschlagen darf, diesen Namen einzuführen.

der ausgezogenen Richtungslinien wählen dürfen, nicht aber eine der durch gestrichelte Linien angegebenen Richtungen.

Analoges ist im allgemeinsten Falle zu beachten. Die singulären Punkte sollen in <u>algebraische</u> und in <u>transcendente</u> Verzweigungspunkte unterschieden werden, je nachdem zu demselben nur Potenzen $(u-a)^\alpha$, oder auch noch Exponentialfactoren gehören. (Dabei rechnen wir auch die Fälle irrationaler oder complexer α, wenn kein Exponentialfactor vorhanden ist, trotz der dann unendlichen Zahl in dem Punkte zusammenhängender Blätter mit zu den algebraischen Fällen).

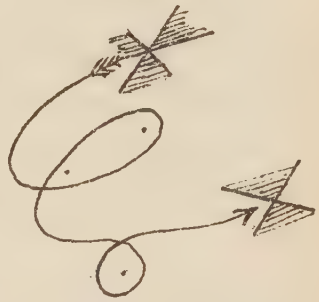
Wenn nun a ein algebraischer Punkt ist, so soll der Integrationsweg um a herumführen. Ist hingegen a ein transcendenter Punkt und wird der Exponent von l daselbst r-fach unendlich, so gibt es $2r$ von



dem Punkte auslaufende Richtungen, in denen der reelle Teil des Exponenten verschwindet. In den zwischenliegenden $2r$ Sectoren wird der reelle Teil des Exponenten abwechselnd positiv und negativ unendlich.

unendlich.

Ist a ein transcendenter Verzweigungspunkt bei dem die Summe im Exponenten bis r läuft, so gibt es $2r$ von demselben auslaufende Winkelräume von der Öffnung $\frac{\pi}{r}$, innerhalb deren der Factor $(u-a)^{\alpha} \cdot e^{\sum_1^r \frac{a_\varrho}{(u-a)^\varrho}}$ abwechselnd verschwindet und unendlich wird.



Als erlaubte Integrationswege erscheinen solche, welche entweder geschlossen sich zwischen den singulären Punkten herumziehen, so daß bei Durchlaufung derselben der Integrand zu Anfang und Ende denselben Wert annimmt, (Doppelumläufe, z. B., oder aber auch offene Wege, welche von einem transcendenten singulären Punkte auslaufend wieder in einen transcendenten singulären Punkt einlaufen, dabei aber immer in einem derjenigen r Winkelräume sich halten, innerhalb deren der Integrand nicht unendlich wird. (Die verbotenen Winkelräume sind in der Figur schraffirt.)

In dieser Allgemeinheit werden wir den Gegenstand in unserer Vorlesung nicht behandeln; dagegen nimmt die oben erwähnte Arbeit von

Nekrassoff in Math. Ann. 38. diesen allgemeinen Standpunkt ein. Es sei nur noch bemerkt, dass unter diesen allgemeinsten Euler'schen Integralen ein grosser Teil der in der Litteratur sonst vorkommenden Integrale enthalten ist, z. B. die Integrale für die Bessel'schen Functionen.

Wir beschränken uns auf den ersten über die B-Function hinausgehenden Fall, auf das hypergeometrische Integral.

$$\int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(ud)^{\delta}(udu)$$

Wir teilen die hierüber zu machenden Bemerkungen in eine Reihe kleinerer Abschnitte:

1) Algebraische Bemerkungen.

Damit die Gesammtdimension des Integranden in u_1, u_2 die 0 sei, muss

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2$$

sein. Dagegen ist das Integral, wie es vorliegt, in den Variablen a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2, von den Dimensionen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Es ist also eine „Form" sowohl von a_1, a_2 wie von b_1, b_2 u.s.w. Und zwar ist diese Form eine „simultane Invariante" dieser 4 Reihen von Variablen, denn bei simultaner linearer Substitution

derselben ändert sich jede Determinante des Integranden um die Substitutionsdeterminante als Factor, also ändert sich auch das Integral nur um einen Factor:

$$r^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+1} = r^{-1}.$$

Diesen Charakter wird das Integral nicht verlieren, wenn wir es noch mit irgend welchen Potenzen der 6 Determinanten $(ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd)$ multipliciren.

Eine solche Form ist das von Schellenberg an die Spitze gestellte Integral

$$\Pi\left(\begin{matrix} a_1, a_2 \\ \alpha \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1, b_2 \\ \beta \end{matrix}\middle|\begin{matrix} c_1, c_2 \\ \gamma \end{matrix}\middle|\begin{matrix} d_1, d_2 \\ \delta \end{matrix}\right)$$

welches folgendermaßen definirt ist:

$$(ab)^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} (ac)^{-\frac{\alpha+\gamma+1}{2}} (ad)^{-\frac{\alpha+\delta+1}{2}} \cdot (bc)^{-\frac{\beta+\gamma+1}{2}} \cdot (bd)^{-\frac{\beta+\delta+1}{2}} \cdot (cd)^{-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}$$

$$\cdot \int (ua)^{\alpha} (ub)^{\beta} (uc)^{\gamma} (ud)^{\delta} (u, du).$$

Diese Form ist in jedem der 4 Variablenpaare von der Dimension $-\frac{1}{2}$.

Andererseits kann man die Forderung stellen, daß unser Integral keine Form, sondern eine Function eines jeden der Quotienten

$a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$, $d = \frac{d_1}{d_2}$ sein soll.

Um das Schellenberg'sche Π zu einer Form von der 0ten Dimension in den $a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2; d_1, d_2$ zu machen, kann man irgend einen Factor der Form

$$((ad)(bc))^p((bd)(ca))^q((cd)(ab))^r$$

hinzufügen, wo $p+q+r=+\frac{1}{2}$ zu wählen ist, und von da aus eröffnet sich ein sehr einfacher Zusammenhang mit Riemann's $\mathcal{P}$-Function.

[Fr. d. 1. Dez. 93.]

Das Integral ohne Zusatzfactoren, sahen wir gestern, multiplicirt sich bei simultaner Substitution seiner 4 Variablenpaare mit r^{-1}; es ist also eine Invariante vom Gewichte -1. Dasselbe gilt von dem Schellenberg'schen Π.

Die letzte in der vorigen Stunde aufgestellte Form von der Dimension 0, welche wir $\mathcal{P}$ nennen wollen, ist dagegen, wie leicht zu sehen, eine absolute Invariante.

Diesen letzteren Umstand benutzend, führen wir in $\mathcal{P}$ wieder unhomogene Variable ein, indem wir setzen:

$$u=\frac{u_1'}{u_2'}=\frac{(au)(bc)}{(bu)(ac)}, \qquad \frac{(ad)\cdot(bc)}{(bd)\cdot(ac)}=x$$

Wird $\frac{u_1}{u_2}$ zu $\frac{a_1}{a_2}, \frac{b_1}{b_2}, \frac{c_1}{c_2}, \frac{d_1}{d_2}$, so wird

$u = \frac{u_1'}{u_2'}$ zu $0, \infty, 1, x$.

Wir haben also die 4 Punkte a, b, c, d durch lineare Transformation in die Punkte $0, \infty, 1, x$ verwandelt, wo x das Doppelverhältnis derselben ist.

Da unsere Form P in jedem Variablenpaare von der Dimension 0 ist, es also nur auf das Verhältnis von a_1 zu a_2 ankommt, so dürfen wir $a_1' = 0$, $a_2' = 1$ setzen, ebenso $b_1' = 1$, $b_2' = 0$; $c_1' = 1$, $c_2' = 1$; $d_1' = x$, $d_2' = 1$. Dann wird aber einfach, wenn wir zugleich $u_1' = u$, $u_2' = 1$ setzen:

$$(a'b') = -1,\ (a'c') = -1,\ (a'd') = -x,\ (b'c') = +1,\ (b'd') = +1,\ (c'd') = 1-x,$$
$$(a'd')(b'c') = -x,\quad (c'd')(c'a') = 1,\quad (c'd')(a'b') = -(1-x),$$
$$(u'a') = u,\ (u'b') = -1,\quad (u'c') = -(1-u)\quad (u'd') = u-x,$$
$$(u', du') = -du.$$

Dies ins Integral eingesetzt ergibt

$$(-1)^{1-q} \cdot x^{p-\frac{\alpha+\delta+1}{2}} \cdot (1-x)^{r-\frac{\beta+\delta+1}{2}} \cdot \int u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(x-u)^{\delta} \cdot du.$$

Unser Integral P verwandelt sich durch eine geeignete lineare Substitution in das vorstehende *), wobei ersichtlich ist, daß eine geeignete unhomogene Schreibweise sehr viel kürzere Formeln liefert, als die

*) welches von dem anfänglich eingeführten unsymmetrischen hypergeometrischen Integral $\int u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-xu)^{-a}\,du$ nur unwesentlich verschieden ist. (Substitution $\frac{1}{u}$ für u)

homogene Schreibweise, während letztere den Vorzug hat, bei ihrer symmetrischen Bauart die gleich berechtigten Elemente auch als gleichberechtigt erkennen zu lassen.

Die kurze, aber unsymmetrische Formel ist in jedem einzelnen Falle für die wirkliche Rechnung heranzuziehen, nachdem man sie zweckmäßig ausgewählt hat. Die symmetrische Formel aber gibt den allgemeinen Überblick über die Theorie und tritt also an die Stelle der langen Tabellen von einzelnen Formeln, die man gewöhnlich in den Büchern findet.

Unser Integral P wird sich je nach der Wahl des Integrationswegs als der eine oder der andere Zweig der Riemann'schen P-Function mit den Argumenten $0, \infty, 1, x$ erweisen:

$$P = P\begin{vmatrix} \overset{0}{p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}} & \overset{\infty}{q + \frac{\beta+\delta+1}{2}} & \overset{1}{r + \frac{\gamma+\delta+1}{2}} & x \\ p - \frac{\alpha+\delta+1}{2} & q - \frac{\beta+\delta+1}{2} & r - \frac{\gamma+\delta+1}{2} & \end{vmatrix}.$$

Bisher haben wir eigentlich nur vom Integranden gesprochen. Wenn wir jetzt auf das Integral selbst eingehen, wollen wir uns vor allem über die

Vieldeutigkeit des Integrals

klar werden.

Wir werden das Integral längs irgend eines Weges erstrecken, der auf der zum Integranden gehörigen R.Fl. geschlossen ist, d.h. längs dessen der Integrand wieder seinen Ausgangswert annimmt

Unser geschlossener Weg wird den einzelnen singulären Punkt gleich oft in positivem, wie in negativem Sinn umkreisen müssen, damit er in unserm Sinn ein geschlossener Weg sei.

Solcher Wege gibt es natürlich unendlich viele. Zu der hieraus entspringenden Vieldeutigkeit der Definition kommt aber noch der Umstand hinzu, daß wir noch mit gewisser Willkür festsetzen können, was wir unter dem Integranden längs des Weges verstehen wollen, d.h. wie wir die in ihm vorkommenden Exponentialgrößen definieren wollen.

Wir werden nun zuzusehen haben, wie wir in die Gesamtheit all dieser unendlich vielen verschiedenen Werte des Integrals Uebersicht und Ordnung bringen.

Zunächst wollen wir die a, b, c, d und die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als constant ansehen, und also die verschiedenen möglichen Werte des Integrals als nebeneinanderstehend betrachten, um erst in der nächsten Stunde auf die tiefer dringende Frage einzugehen, wie bei Variirung

jener Constanten die verschiedenen Zweige mit einander zusammenhängen mögen.

1.) Wählen wir für $(ua)^\alpha$ irgend einen seiner Werte aus, so unterscheiden sich alle anderen Werte von diesem einen um ganzzahlige Potenzen von $e^{2i\pi\alpha}$. Analoges gilt für die anderen Factoren des Integranden, so dass man den Satz hat:

Aus jedem Werte von J, den wir irgendwie berechnet haben, ergeben sich entsprechend anderen Definitionen der Exponentialgrößen $(ua)^\alpha, (ub)^\beta, (uc)^\gamma, (ud)^\delta$ alle andern zum selben Integrationswege gehörenden Werte durch Hinzufügung eines Factors der Gestalt $e^{2i\pi(\kappa\alpha+\lambda\beta+\mu\gamma+\nu\delta)}$, unter $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ irgend welche ganze Zahlen verstanden.

2.) Zweitens fragen wir, wie die Definition des Integrals von der Auswahl des Periodenweges abhängt?

Wir wenden hier, um die Beziehungen zwischen den unendlich vielen möglichen geschlossenen Integrationswegen zu erforschen, folgenden Kunstgriff an:

Wir sind früher zur Anwendung der Doppelumläufe durch den Umstand geführt worden, dass die offenen Integrationswege in manchen Fällen versagten.

In den Fällen jedoch, wo auch die letzteren ihre

Bedeutung haben, kann man die Beziehungen zwischen den verschiedenen Integralen auch mit Hülfe der von Punkt zu Punkt gehenden Wege ergründen; die so gefundenen Beziehungen müssen aber nach dem Princip der analytischen Fortsetzung allgemeine Bedeutung haben.

In diesem Sinne wollen wir jetzt verfahren. Wir machen eine Zeit lang die Voraussetzungen

$$R(\alpha) > -1,\ R(\beta) > -1,\ R(\gamma) > -1,\ R(\delta) > -1,$$

welche der Relation

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2$$

nicht widersprechen.

Unter diesen Voraussetzungen dürfen wir alle geschlossenen Wege bis an die singulären Punkte selbst heranziehen, so daß sie aus offenen Wegen zwischen den einzelnen singulären Punkten zusammengesetzt sind. Die Mannigfaltigkeit solcher offenen Wege läßt sich nun leicht überschauen, womit man zugleich eine Uebersicht über die Mannigfaltigkeit aller geschlossenen Wege gewinnt, bei der man die anfänglichen beschränkenden Voraussetzungen fallen lassen darf.

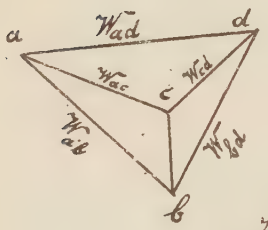
Ich werde die Uebersicht über die verschiedenen Werte von J unter den beschränkenden Voraussetzungen

$$\mathfrak{R}(\alpha) > -1, \quad \mathfrak{R}(\beta) > -1, \mathfrak{R}(\gamma) > -1, \mathfrak{R}(\delta) > -1$$

herleiten, um dann zu überlegen, daß diese Uebersicht allgemein gilt, auch wenn die beschränkenden Voraussetzungen nicht zutreffen.

Wir verbinden die 4 singulären Punkte paarweise etwa durch geradlinige Wege

$$W_{ab}, W_{ac}, W_{ad}, W_{bc}, W_{bd}, W_{cd}.$$



Der allgemeinste offene von einem singulären Punkt zu einem andern verlaufende oder auch geschlossene Weg stellt sich geometrisch in der Form

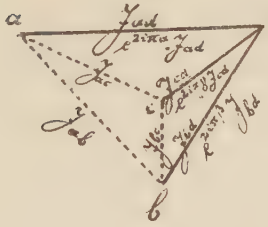
$$W = c_1 W_{ab} + c_2 \cdot W_{ac} + c_3 \cdot W_{ad} + c_4 \cdot W_{bc} + c_5 \cdot W_{bd} + c_6 \cdot W_{cd}$$

dar, wo die $c_1, c_2 \cdots c_6$ ganze Zahlen sind. Dies ist geometrisch unmittelbar klar.

Die unsern sechs Elementarwegen entsprechenden Integrale sollen jetzt $J_{ab}, J_{ac}, J_{ad}, J_{bc}, J_{bd}, J_{cd}$ heißen.

Vorher müßen wir natürlich verabreden, wie wir dabei die Potenzen $(xa)^{\alpha}$ u. s. w. längs der Wege $W_{ab} \cdots$ festlegen wollen. Wir denken uns zu dem Zwecke die Ebene längs der 3 Wege W_{ad}, W_{bd}, W_{cd} aufgeschnitten. In dieser zerschnittenen Ebene kann man nun nach Belieben

irgend eine Definition der Potenzen $(ua)^\alpha$, $(ub)^\beta$, $(uc)^\gamma$, $(ud)^\delta$ zu Grunde legen, und wird ohne Ueberschreitung des Einschnittssystems nie zu andern Werten der Potenzen gelangen.



Unter J_{ad} wollen wir nun den Wert des auf der linken Seite des Schnittes W_{ad} von a nach d erstreckten Integrals verstehen, ebenso unter J_{cd}, J_{bd} die auf der linken Seite der betreffenden Schnitte erstreckten Integrale.

Auf der rechten Seite von W_{ad} unterscheidet sich aber der Wert des Integranden von demjenigen auf der linken Seite um den Factor $e^{2i\pi\alpha}$. Also ergibt das Integral auf der rechten Seite von a nach d erstreckt, den Wert $e^{2i\pi\alpha} J_{ad}$. Entsprechend ergeben sich auf der rechten Seite von W_{bd}, W_{cd} die Werte $e^{2i\pi\beta} J_{bd}$, $e^{2i\pi\gamma} J_{cd}$.

Die andern Integrationswege W_{ac}, W_{bc}, W_{ab} dagegen ergeben zu beiden Seiten dieselben Werte J_{ac}, J_{bc}, J_{ab}.

Solcher Weise haben wir für die 6 Integralwerte

$$J_{ab},\ J_{ac},\ J_{ad},\ J_{bc},\ J_{bd},\ J_{cd}$$

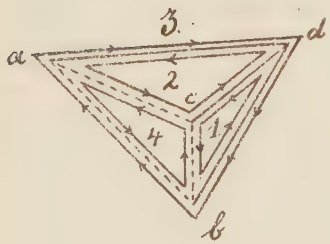
ganz bestimmte Verabredungen.

Wenn wir nun sagen, daß man jeden beliebigen Integrationsweg aus den Elementarwegen

$$W_{ab},\ W_{ac},\ W_{ad},\ W_{bc},\ W_{bd},\ W_{cd}$$

ganzzahlig zusammensetzen kann, so entspricht dem, daß man jedes beliebige Integral aus den Integralen $J_{ab}, J_{ac}, J_{ad}, J_{bc}, J_{bd}, J_{cd}$ linear zusammensetzen kann mit Coefficienten, welche ganzzahlige ganze Functionen der $e^{2i\pi\alpha}, e^{2i\pi\beta}, e^{2i\pi\gamma}, e^{2i\pi\delta}$ sind. [Mo. d. 4. Dez. 73.]

Nun sind aber auch die 6 Wege nicht unabhängig voneinander. Dementsprechend bestehen auch zwischen den Integralen $J_{ab} \cdots J_{cd}$ lineare homogene Beziehungen, welche uns gestatten, diese Integrale noch durch eine geringere Zahl unter ihnen auszudrücken.



Durch unsere 6 Wege W_{ab}, W_{ac}, W_{ad}, u.s.w. wird die ganze Ebene in 4 Gebiete geteilt, nämlich in die 3 Dreiecke bcd, acd, abc und in das Äußere des Dreiecks abd, welches wir selbst als ein Dreieck auffassen können, wie man am Leichtesten einsieht, wenn man die ganze Figur

auf die Kugel projicirt.

Integrirt man nun um irgend eines dieser Dreiecke herum, so muss man als Gesammtwert des Integrals 0 bekommen. So erhält man folgende 4 Relationen:

$$\begin{cases} -J_{bc} + J_{bd} - e^{2i\pi\gamma} \cdot J_{cd} = 0, \\ -J_{ca} + J_{cd} - e^{2i\pi\alpha} \cdot J_{ad} = 0, \\ -J_{ab} + J_{ad} - e^{2i\pi\beta} \cdot J_{bd} = 0, \\ J_{ab} + J_{bc} + J_{ca} = 0. \end{cases}$$

Setze ich in den ersten Relationen die J_{bc}, J_{ca}, J_{ab} auf eine Seite, und drücke dieselben in der letzten Relation durch die Integrale J_{ad}, J_{bd}, J_{cd} aus, so nehmen die Relationen folgende Gestalt an:

1.) $J_{bc} = J_{bd} - e^{2i\pi\gamma} J_{cd}$,

2.) $J_{ca} = J_{cd} - e^{2i\pi\alpha} \cdot J_{ad}$,

3.) $J_{ab} = J_{ad} - e^{2i\pi\beta} \cdot J_{bd}$,

4.) $(1-e^{2i\pi\alpha}) \cdot J_{ad} + (1-e^{2i\pi\beta}) \cdot J_{bd} + (1-e^{2i\pi\gamma}) \cdot J_{cd} = 0$

Wir ersehen hieraus:

<u>Alle unsere Integrale J sind lineare Verbindungen</u>

der drei Integrale J_{ad}, J_{bd}, J_{cd}, zwischen denen die Relation 4) besteht. und zwar sind die Coefficienten der linearen Verbindungen ganzzahlige ganze Verbindungen der drei Einheitswurzeln:

$$e^{\pm 2i\pi\alpha},\ e^{+2i\pi\beta},\ e^{\pm 2i\pi\gamma}.$$

Die sämtlichen Integrale J sind also in einer binären Schaar enthalten.

So gestaltet sich die Theorie der Integrale, wenn wir die Integration bis an die einzelnen Verzweigungspunkte selbst heranführen dürfen. Zwischen den Integralen J_{ad} u. s. w. und den Doppelumlaufintegralen $\bar{J}_{ad}$ u. s. w. besteht dann folgender Zusammenhang:

$$J_{ad} = \frac{\bar{J}_{a,d}}{(1-e^{2i\pi\alpha})(1-e^{2i\pi\delta})}$$

und entsprechend für die andern Integrale.

Wenn nun die Bedingungen $R(\alpha) > -1$, $R(\beta) > -1$ u. s. w. nicht erfüllt sind, dann verlieren zwar die J_{ad} als Integrale ihre Bedeutung, nicht aber die Doppelumlaufintegrale $\bar{J}_{ad}$.

Betrachten wir dann die vorstehende Formel geradezu als Definition der J_{ad}, so gilt diese auch dann, wenn die Exponenten keinen Beschränkungen

unterworfen sind, und die für die Integrale J_{ad}, J_{bd}, J_{cd}, J_{ab}, J_{bc}, J_{ca} gefundenen linearen Relationen müssen dann auch für die in angegebener Weise durch die Doppelumlaufintegrale $\bar{J}_{ad}$ u. s. w. definirten analytischen Functionen J_{ad}, J_{bd} u. s. w. ihre Gültigkeit behalten.

Die so gewonnenen Formeln sind allgemeingültig, wenn wir unter den 6 Integralen J_{ad}, J_{bd}, J_{cd}, J_{ab}, J_{bc}, J_{ca} gegebenen Falls nicht die begrenzten Integrale verstehen wollen, sondern die durch Doppelumlaufintegrale definirten Ausdrücke:

$$J_{ad} = \frac{\bar{J}_{ad}}{(1-e^{2i\pi\alpha})(1-e^{2i\pi\delta})},\quad J_{bd} = \frac{\bar{J}_{bd}}{(1-e^{2i\pi\beta})(1-e^{2i\pi\delta})},\quad J_{cd} = \frac{\bar{J}_{cd}}{(1-e^{2i\pi\gamma})(1-e^{2i\pi\delta})},$$

$$J_{bc} = \frac{\bar{J}_{bc}}{(1-e^{2i\pi\beta})(1-e^{2i\pi\gamma})},\quad J_{ca} = \frac{\bar{J}_{ca}}{(1-e^{2i\pi\gamma})(1-e^{2i\pi\alpha})},\quad J_{ab} = \frac{\bar{J}_{ab}}{(1-e^{2i\pi\alpha})(1-e^{2i\pi\beta})}.$$

Es wird nicht nöthig sein, hierin noch mehr ins Einzelne zu gehen, sondern wir wollen nunmehr die in der vorigen Stunde schon in Aussicht genommene functionentheoretische Denkweise einführen, indem wir jetzt die bisherigen Constanten a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als variabel ansehen, und also den analytischen Zusammenhang zwischen den verschiedenen gefundenen Werten des Integrals untersuchen.

Denken wir uns also irgend einen Wert des Integrals

$$J = \int (ua)^{\alpha} (ub)^{\beta} (uc)^{\gamma} (ud)^{\delta} u, du)$$

ausgewählt, und lassen wir dann zuerst die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ variiren. Ich behaupte:

<u>Jede einzelne Bestimmung von J, die wir machen können, liefert uns eine eindeutige ganze Function der Variablen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und alle diese eindeutigen Functionen verlaufen voneinander getrennt, stehen nicht in analytischem Zusammenhang untereinander.</u>

Der Beweis unseres Theorems liegt einfach darin, dass jeder einzelne Exponentialfactor die in Rede stehende Eigenschaft hat.

Denn habe ich einmal bestimmt, was ich in

$$(ua)^{\alpha} = e^{\alpha \cdot \log.(ua)}$$

unter $\log(ua)$ verstehen will, so ist

$$e^{\alpha \log(ua)} = 1 + \alpha \frac{\log(ua)}{1!} + \alpha^2 \cdot \frac{(\log(uo))^2}{2!} + \ldots)$$

da die Reihe für beliebige grosse a convergirt, eine wohlbestimmte eindeutige und ganze (transcendente) Function der Variablen α; durch Variiren von α kann man keinen der andern Werte von $(ua)^{\alpha}$ bekommen. Dasselbe gilt für das Produkt der Potenzen in unserem Integranden und für das Integral.

selbst, z.B. sofern man allein die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ als variabel ansieht.

Wie hängt nun aber unser Integral von den Verzweigungspunkten a, b, c, d und von etwaigen Umläufen derselben ab?

Natürlich hängt das Integral nicht nur von der Lage der Punkte a, b, c, d selbst ab, sondern auch von den Werten a_1, a_2; $b_1 b_2$; $c_1 c_2$; $d_1 d_2$ der homogenen Variablen. Wir werden uns aber von dieser secundären Abhängigkeit dadurch frei machen, indem wir von unserer Form zu der oben mit P bezeichneten <u>Function</u> übergehen, welche nur von den Quotienten $a = \frac{a_1}{a_2}$, $b = \frac{b_1}{b_2}$, $c = \frac{c_1}{c_2}$, $d = \frac{d_1}{d_2}$ abhängt.

$$P = ((ad)(bc))^{\gamma} \cdot ((bd)(ca))^{\delta} \cdot ((cd)(ab))^{\alpha} \cdot$$

$$\cdot (ab)^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} \cdot (ac)^{-\frac{\alpha+\gamma+1}{2}} \cdot (ad)^{-\frac{\alpha+\delta+1}{2}} \cdot (bc)^{-\frac{\beta+\gamma+1}{2}} \cdot (bd)^{-\frac{\beta+\delta+1}{2}} \cdot (cd)^{-\frac{\gamma+\delta+1}{2}} \cdot \int (xa)^{\alpha} \cdot (xb)^{\beta} (xc)^{\gamma} (xd)^{\delta} f(x) dx.$$

<u>Eine jede Bestimmungsweise des Integrals P, aufgefasst als Function des Punktes a oder des Punktes b oder des Punktes c oder endlich des Punktes d wird immer einen Zweig einer Riemann'schen P-Function liefern, und zwar behaupte ich speciellen für den Punkt d, dass es sich dabei um folgende Riemann'sche P-Function handelt:</u>

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ p+\frac{\alpha+\delta+1}{2} & q+\frac{\beta+\delta+1}{2} & r+\frac{\gamma+\delta+1}{2} & \delta \\ p-\frac{\alpha+\delta+1}{2} & q-\frac{\beta+\delta+1}{2} & r-\frac{\gamma+\delta+1}{2} & \end{vmatrix}$$

Zum Beweise hierfür gibt es drei Wege

1.) Differentialgleichung (hypergeometrische Differentialgleichung)

2.) Potenzentwicklung (hypergeometrische Reihe)

3.) Direktes Studium der analytischen Fortsetzung vom Integral selbst aus (neu).

Man kann 1.) zeigen, daß unsere Doppelumlaufintegrale der hypergeometrischen Diff. Gl. genügen, 2.) daß sie sich auf hypergeometrische Reihen zurückführen lassen. Diese beiden Methoden nahm wir bereits zu Anfang des Semesters auf das damals betrachtete begrenzte Integral angewendet, nach dem Vorgang von Euler, und wir werden sie mit geringen Modificationen auch auf unsere Doppelumlaufintegrale sowie überhaupt auf die Integrale mit irgendwelchem geschlossenen Integrationsweg übertragen können. Die dritte Methode dagegen wird uns wesentlich neue Gesichtspunkte liefern und ist insofern die interessanteste, doch wollen wir demungeachtet erst auch auf die beiden ersten Verfahrensweisen eingehen, um zu sehen, wie sich die uns schon bekannten Schlüsse

hier modifiziren.

Wir könnten, wie es Schellenberg in seiner Arbeit thut, die ganzen Betrachtungen mit Beibehaltung der homogenen Variablen durchführen, doch wollen wir es uns, da doch nur Functionen vorliegen, dadurch bequemer machen daß wir das Doppelverhältnis von u zu a, b, c als Integrationsvariable einführen, und, und also wie auf S. 160. setzen

$$u = \frac{(au)(bc)}{(bu)(ac)}, \qquad x = \frac{(ad)(bc)}{(bd)(ac)}.$$

Die zu beweisende Gleichung geht dadurch über in:

$$x^{p-\frac{\alpha+\delta+1}{2}}(1-x)^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}\int u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(x-u)^{\delta}du = \mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ p+\frac{\alpha+\delta+1}{2} & q+\frac{\beta+\delta+1}{2} & r+\frac{\gamma+\delta+1}{2} & x \\ p-\frac{\alpha+\delta+1}{2} & q-\frac{\beta+\delta+1}{2} & r-\frac{\gamma+\delta+1}{2} & \end{vmatrix}$$

(Die links sich ergebende Potenz von (-1) ist unwesentlich, da ja die Riemann'sche $\mathcal{P}$-Function noch eine willkürliche multiplicative Constante enthält.)

Dividiren wir diese Gleichung noch durch den vor dem $\int$ stehenden Factor, so geht sie über in:

$$\int u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(x-u)^{\delta}du = \mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha+\delta+1 & \beta+1 & \gamma+\delta+1 & x \\ 0 & -\delta & 0 & \end{vmatrix}.$$

Setzt man nun noch für x die Variable $\frac{1}{x}$, wendet rechts die bekannte Transformation der Riemann'schen

P-Function an, und multipliciert schließlich die ganze Gleichung noch mit x^δ, so ergibt sich als zu beweisende Identität

$$\int u^\alpha (1-u)^\gamma (1-xu)^\delta \, du = P \begin{vmatrix} \beta+\delta+1 & \alpha+1 & \gamma+\delta+1 & x \\ 0 & -\delta & 0 & \end{vmatrix}.$$

Das Integral auf der linken Seite unterscheidet sich jetzt von dem zu Anfang des Semesters angegebenen Euler'schen Integral nur dadurch, daß es längs eines Doppelumlaufs zu erstrecken ist, während jenes längs des offenen Weges von 0 bis 1 zu nehmen war. Jenes hatte nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen über die Exponenten eine Bedeutung, das jetzige hat immer einen Sinn.

Diese Formel ist nun in der nächsten Stunde zu beweisen, sei es durch Aufstellung der Differentialgleichg, sei es durch Angabe der Reihenentwickelung wohlverstanden Beides für das Doppelumlaufsintegral. [Di. d. 5. Dec. 93.]

Die in der vorigen Stunde vorgenommene Umformung des Integrals P kann man in eins zusammenfassen, indem man setzt

$$u = \frac{(au)(bc)}{(bu)(ac)}, \qquad x = \frac{(bd)(ac)}{(ad)(bc)}.$$

Das Integral P von S. 173. verwandelt sich dabei genau in folgendes:

$$(-1)^{p-\frac{\gamma+\delta}{2}} \cdot x^{q-\frac{\beta+\delta+1}{2}} \cdot (1-x)^{r-\frac{\delta+\delta+1}{2}}$$
$$\cdot \int u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(1-xu)^{\delta}\, du.$$

Durch Division mit dem vor dem $\int$ stehenden Ausdruck entsteht dann die letzte in der vorigen Stunde angegebene Riemann'sche P-Function.

1) Wir wollen nunmehr beweisen, daß das Integral

$$\int u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(1-xu)^{\delta}\, du$$

in der That einer hypergeometrischen Differentialgleichung genügt.

Wir nennen den Integranden w, das Integral K, und bilden uns genau wie beim bestimmten Integral zu Anfang des Semesters die Funktion

$$\Phi = u^{\alpha+1}(1-u)^{\beta+1}(1-xu)^{\delta-1}$$

und ihren Differentialquotienten nach u:

$$\frac{d\Phi}{du} = u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(1-xu)^{\delta-2}\left\{(\alpha+1)(1-u)(1-xu)-(\beta+1)\cdot u(1-xu)-x(\delta-1)u(1-u)\right\}$$

Diesen können wir wieder linear mit von u unabhängigen Coefficienten durch den Integranden w und seinen ersten und zweiten Differentialquotienten

nach x darstellen:

$$\frac{d\Phi}{dx} = (\alpha+1)\cdot\omega + \left(\frac{-\alpha+\gamma+2}{\delta} + \frac{-\alpha+\delta-2}{\delta}x\right)\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{x(1-x)}{\delta}\cdot\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}.$$

Diese Formel wurde nun zwischen 0 und 1 integrirt, und ergab dann, da die Function Φ, das unbestimmte Integral der linken Seite, an beiden Grenzen verschwand, wenigstens unter den für die Exponenten gemachten Voraussetzungen, eine lineare Differentialgleichung für das bestimmte Integral $\mathfrak{A}$, nämlich (wenn ich noch mit δ multiplicire):

$$0 = \delta(\alpha+1)\mathfrak{A} + (\alpha+\gamma+2+(-\alpha+\delta-2)x)\frac{d\mathfrak{A}}{dx} + x(1-x)\frac{d^2\mathfrak{A}}{dx^2}$$

Jetzt haben wir es aber statt mit einem bestimmten Integrale von 0 bis 1 mit einem Doppelumlaufsintegrale um irgend zwei Punkte zu thun.

Der Unterschied in der Ableitung der Differentialgleichung für $\mathfrak{A}$ ist nun dieser, daß wir früher das Integral $d\Phi$ zwischen 0 und 1 erstreckt gleich 0 setzen, weil Φ insbesondere so construirt war, daß es an den beiden Endpunkten der Integration verschwand, jetzt aber das $\int_{\mathfrak{B}} d\Phi = 0$ zu setzen ist, weil es sich um eine geschlossene Integration auf der zu Φ gehörigen Riemann'schen Fläche handelt.

Der Hauptfortschritt gegen früher ist dabei der, daß der jetzige Ansatz ohne Unterschied für ganz-

beliebige Exponenten seine Gültigkeit behält.

2. Ebenfalls in genau derselben Weise wie das begrenzte Integral setzen wir auch das Doppelumlaufintegral in eine hypergeometrische Reihe um.

Wir entwickeln $(1-xu)^{\delta}$ nach dem binomischen Satz nach steigenden Potenzen von x:

$$(1-xu)^{\delta} = 1 - \delta x \cdot u + \frac{\delta(\delta-1)}{1\cdot 2} x^2 u^2 - \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 u^3 + \cdots$$

und erhalten so eine Reihe von Integralen:

$$\int u^{a}(1-u)^{\gamma} du - \delta x \int u^{a+1}(1-u)^{\gamma} du + \frac{\delta(\delta-1)}{1\cdot 2} x^2 \int u^{a+2}(1-u)^{\gamma} du - \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \int u^{a+3}(1-u)^{\gamma} du + \cdots$$

wobei nun jetzt zum Unterschied von früher jedes Integral längs eines die Punkte 0 und 1, d.h. a und c umschlingenden Doppelumlaufs zu erstrecken ist, statt längs der begrenzten Strecke 0 1. Demgemäß haben wir für die einzelnen Integrale jetzt die modificirte Euler'sche Formel anzuwenden (S. 174), so daß man erhält (abgesehen von einer Potenz von -1)

$$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-a)\Gamma(-\gamma)\Gamma(a+\gamma+2)} - \frac{4\pi^2\delta}{\Gamma(-a-1)\Gamma(-\gamma)\Gamma(a+\gamma+3)} x + \frac{4\pi^2 \frac{\delta(\delta-1)}{1\cdot 2}}{\Gamma(-a-2)\Gamma(-\gamma)\Gamma(a+\gamma+4)} x^2 - \cdots$$

$$= \frac{4\pi^2}{\Gamma(-a)\Gamma(-\gamma)\Gamma(a+\gamma+2)} \left\{ 1 + \frac{(-\delta)\cdot a}{1\cdot(a+\gamma+2)} x + \frac{(-\delta)(-\delta+1)\cdot a(a+1)}{1\cdot 2\cdot(a+\gamma+2)(a+\gamma+3)} x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(-\delta)(-\delta+1)(-\delta+2)\cdot a(a+1)(a+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(a+\gamma+2)(a+\gamma+3)(a+\gamma+4)} x^3 + \cdots \right\}$$

$$= \frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2)} \cdot F(-\beta, \alpha, \alpha+\beta+2, x).$$

So sind wir nun der That zur hypergeometrischen Reihe gelangt, nur mit einem bestimmten von den Exponenten abhängigen Factor behaftet.

Das ursprüngliche hier angeführte geschriebene Integral P (S. 153.) erhält nun durch Multiplication mit $x^{\gamma - \frac{\beta+\delta+1}{2}}(1-x)^{\gamma - \frac{\alpha+\gamma+1}{2}}$, nicht zwar handelt es sich hier gerade um denjenigen Doppelumlauf als Integrationsweg, welcher die Punkte a und c umschlingt. Ein auf diesem Wege erstrecktes Integral heiße $P(ac)$.

Wir sehen nun, daß unser Integral $P(ac)$ gerade den einen der zum Punkte a gehörigen Fundamentalzweige der Riemannschen P-Function darstellt, der aus einer Potenzreihe besteht, die mit $x^{\gamma - \frac{\beta+\delta+1}{2}} - x^{\gamma + \frac{\alpha+\beta+1}{2}}$ multiplicirt ist.

Indem wir in der x-Ebene den Doppelumlauf um die Punkte a und c nehmen, kommen wir auf denjenigen Fundamentalzweig unserer P-Function, welcher in der Umgebung des Punktes $x=0$ durch das Symbol $e^{\pi i(\gamma - \frac{\beta+\delta}{2})}$ oder, was dasselbe ist, $P\,\gamma + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$ zu bezeichnen ist. Dieser Zweig aber ist so mit einem constanten Factor

multiplicirt, daß das erste Glied der Reihenentwicklung nach Potenzen von x (abgesehen von einer bis zu gewissem Grade willkürlichen Potenz von -1) den numerischen Bestandteil hat:

$$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(-\beta)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

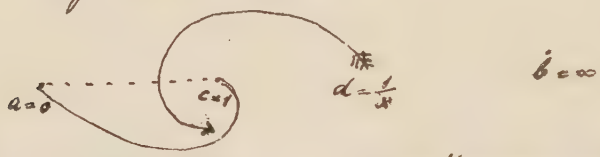
Hätten wir das Integral auf einem Doppelumlauf um zwei andere Punkte berechnet, so hätten wir ein ganz entsprechendes Resultat erhalten, welches sich aus demjenigen für $P^{(ac)}$ durch bloße Buchstabenvertauschung und ev. Ersetzung von x durch die entsprechende lineare Function $\frac{1}{x}$, $1-x$ u. s. w. ergibt.

Jeder der 6 möglichen Doppelumläufe liefert so gerade einen der 6 Fundamentalzweige, insbesondere liefert den zweiten zu $x=0$ gehörigen Fundamentalzweig das Integral $P^{(bd)}$.

Das Integral $P^{(bd)}$ liefert uns für die Umgebung der Stelle $x=0$ den zweiten Hauptzweig, den wir nach seinem Exponenten mit $P^{q+\frac{\beta+\delta+1}{2}}$ oder, was dasselbe ist, mit $P^{q-\frac{\alpha+\gamma+1}{2}}$ zu bezeichnen haben, und die Reihenentwicklung, welche wir hier bekommen, fängt mit dem Coefficienten an:

$$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\beta)\,\Gamma(-\delta)\,\Gamma(\beta+\delta+2)}$$ (NB. von etwaigen Potenzen von (-1) abgesehen).

3) Nach Verificirung der Differentialgleichung und der Reihenentwicklung versuchen wir nun endlich aus dem Integrale selbst auf functionentheoretischem Wege das charakteristische Verhalten der P-Function zu erschliessen. Der Doppelumlauf um zwei Punkte soll der Bequemlichkeit halber in den Zeichnungen durch eine einfache die beiden Punkte verbindende Linie angedeutet werden.



Es handle sich um das Integral $P^{(ac)}$. Der Integrationsweg, welcher in der Ebene der Variablen zwischen 0 und 1 verläuft, kann beliebig deformirt werden, nur sind seine Endpunkte festzuhalten, und darf er nie über einen singulären Punkt hinweggezogen werden.

Lassen wir nun, um das functionentheoretische Verhalten des Integrals als Function von x zu erforschen den Wert x variiren, d. h. den Verzweigungspunkt $\frac{1}{x}$ wandern. Dabei darf jedoch dieser Verzweigungspunkt den Integrationsweg nie überschreiten, weil wir sonst eine unstetige Aenderung der Function bekämen; <u>dennoch brauchen wir die</u>

Veränderlichkeit von x keiner Beschränkung zu unterwerfen, da man ja den Integrationsweg continuirlich so deformiren kann, daß er dem Punkte $\frac{1}{x}$ immer ausweicht. Wir sagen geradezu:

Um unser bestimmtes Integral als eine Function von x aufzufassen, müssen wir uns den Integrationsweg als einen elastischen Faden denken, die Verzweigungspunkte als Stifte, über welche der Faden nicht hinweggleiten kann, so daß, wenn ein wandernder Verzweigungspunkt gegen unsern Faden stößt, er weiter den Faden vor sich herschiebt, ohne ihn zu zerreißen oder zu überschreiten.

Lassen wir in dieser Weise den Verzweigungspunkt $\frac{1}{x}$ z. B. einen geschlossenen Umlauf um den Punkt 1 ausführen, so wird er den Integrationsweg in folgender Weise deformiren:

Der Weg von 0 nach 1

hat sich also in einem Weg verwandelt, der von 0 nach 1, von 1 nach $\frac{1}{x}$ verläuft und dann wieder nach Umkreisung des Punktes $\frac{1}{x}$ von $\frac{1}{x}$ nach 1 zurück.

Das Integral $\mathfrak{P}(0,1)$ verwandelt sich also in $\mathfrak{P}(0,1) \underset{-}{+} \mathfrak{P}(1,\frac{1}{x}) \underset{-}{+} 2i\pi\delta\, \mathfrak{P}(1,\frac{1}{x})$.

Wir sehen im Beispiel, daß nach dem Umlauf des Punktes $\frac{1}{x}$ um den Punkt 1 das Integral $\mathfrak{P}^{(0,1)}$ sich in $\mathfrak{P}^{(0,1)} + (1-e^{2i\pi\delta}) \cdot \mathfrak{P}^{(1,\frac{1}{x})}$ verwandelt hat.

So wird überhaupt jeder Integrationsweg nach einem beliebigen Umlauf des $\frac{1}{x}$ sich in eine neue Combination der fundamentalen 6 Wege verwandeln, und das kommt dann darauf hinaus, daß irgend zwei linear unabhängige Integrale $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, die wir einmal auswählen, nach einem Umlauf des x sich in zwei neue Integrale verwandelt haben werden, welche lineare Combinationen der $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ sind, d.h. bei jedem Umlauf des x erfahren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ eine lineare Substitution, was eben die charakteristische Eigenschaft der Riemann'schen $\mathfrak{P}$-Funktion ist. [Do. d. 7. Dez. 93.]

Wie gestaltet sich nun im Einzelnen die Theorie der $\mathfrak{P}$-Funktion von der Definition durch unser Doppelumlaufintegral aus? Insbesondere, welche Vorzüge besitzt dieses Verfahren, das Integral an die Spitze zu stellen? Wir sagen zunächst:

Ausgehend von dem Integral bilden wir uns durch zwei geschlossene Umläufe zwei linear unabhängige Functionenzweige $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Als $\mathfrak{P}$-Function soll dann jede Function bezeichnet werden, die aus einer

linearen Verbindung $c_1 \mathfrak{P}_1 + c_2 \mathfrak{P}_2$ dieser Zweige durch analytische Fortsetzung erwächst, unter c_1 c_2 beliebige numerische Constanten verstanden.

Denken wir nun unsere Integrale nach Potenzen des Doppelverhältnisses $x = \frac{(ad)\cdot(bc)}{(bd)\cdot(ad)}$ entwickelt, so ergibt sich:

Die Definition der $\mathfrak{P}$-Function vom Integral aus ist einbegriffen unter dem Riemann'schen Symbol

$$\mathfrak{P}\left|\begin{array}{ccccc} & 0 & \infty & 1 & \\ & p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2} & q \pm \frac{\beta+\delta+1}{2} & r \pm \frac{\gamma+\delta+1}{2} & \\ & \| & \| & \| & x \\ & p \mp \frac{\beta+\gamma+1}{2} & q \mp \frac{\alpha+\gamma+1}{2} & r \mp \frac{\alpha+\beta+1}{2} & \end{array}\right| 1$$

wobei x ein geeignetes Doppelverhältnis der vier Punkte a, b, c, d bedeutet.

In diesem Riemann'schen Symbol gehören insbesondere zum Punkte $x = 0$, d. h. $d = a$ oder $b = c$ zwei Fundamentallösungen $\mathfrak{P}\, p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ und $\mathfrak{P}\, p + \frac{\beta+\gamma+1}{2}$.

Als Integrale sind diese geradezu folgendermaßen definirt:

Die eine Fundamentallösung $\mathfrak{P}\, p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ wird durch den Doppelumlauf in der u-Ebene um die Punkte a und d geliefert, die andere $\mathfrak{P}\, p + \frac{\beta+\gamma+1}{2}$ durch den Doppelumlauf um die Punkte b und c. Entsprechendes gilt für die zu ∞ und 1 gehörenden Fundamentallösungen.

Über die Entwickelung der Theorie von der Integraldefinition aus greift mannigfach über den von Riemann in seiner Arbeit innegehaltenen Standpunkt hinaus.

Vorzüge der Integralbetrachtung vor dem Riemann'schen Schema.

1. / Bei Riemann erscheint die P-Function nur als Function von x, bei uns erscheint sie als Function der vier Verzweigungspunkte a, b, c, d und der vier Exponenten α, β, γ, δ sowie der Zahlen p, q, r.

Wir wollen jetzt so schreiben:

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2} & q \pm \frac{\beta+\delta+1}{2} & r \pm \frac{\gamma+\delta+1}{2} & d \end{matrix}\right|$$

Riemann betrachtet diese Function nur als Function von d, nicht auch von a, b, c. Im Riemann'schen Sinne bleibt die Function auch noch eine P-Function derselben Art, wenn man sie mit irgend einer von d unabhängigen Größe multiplicirt. Diese willkürliche Constante kann von den a b c, den α, β, γ, δ und den p, q, r noch in ganz beliebiger Weise abhängen.

Der erste Fortschritt ist der, daß unsere P-Function als Function sämtlicher Größen a b c d α β γ δ p q r völlig definirt ist, während bei der andern Behandlung

weise die Abhängigkeit allein von d ins Auge gefasst wird.

2) Wir werden dies zweckmäßig durch Einführung eines neuen Schemas ausdrücken, welches diese Abhängigkeit in symmetrischer Weise hervortreten läßt.

Wir schreiben:

$$
\mathfrak{P}\left|\begin{array}{cccc|c}
a & b & c & d & \\
p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2} & q \pm \frac{\beta+\delta+1}{2} & r \pm \frac{\gamma+\delta+1}{2} & \text{———} & d \\
q \mp \frac{\alpha+\gamma+1}{2} & p \mp \frac{\beta+\gamma+1}{2} & \text{———} & r \pm \frac{\gamma+\delta+1}{2} & c \\
r \mp \frac{\alpha+\beta+1}{2} & \text{———} & p \mp \frac{\beta+\gamma+1}{2} & q \pm \frac{\beta+\delta+1}{2} & b \\
\text{———} & r \mp \frac{\alpha+\beta+1}{2} & q \mp \frac{\alpha+\gamma+1}{2} & p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2} & a
\end{array}\right.
$$

Die Gleichberechtigung der vier Punkte a, b, c, d wird durch dieses erweiterte Schema zum Ausdruck gebracht. Die simultane Abhängigkeit des $\mathfrak{P}$ von den vier Punkten a, b, c, d ist erschöpfend angegeben, wenn wir nur sagen, es sei eine absolute Invariante der a, b, c, d, d.h. eine Function des Doppelverhältnisses derselben.

3) Mit dieser erweiterten Auffassung hängt zusammen, was über die Differentialgleichung der $\mathfrak{P}$-Function zu sagen ist. Man sieht:

Die gewöhnliche Differentialgleichung gibt eine lineare Relation zwischen $\mathfrak{P}, \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial d}, \frac{\partial^2 \mathfrak{P}}{\partial d^2}$.

An Stelle dieser Differentialgleichung tritt jetzt ein ganzes System linearer Differentialgleichungen, indem zwischen je drei Grössen aus der Reihe $\mathcal{P}$; $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial a}$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial b}$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c}$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial d}$; $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial a \partial b}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial a \partial c}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial a \partial d}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial b^2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial b \partial c}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial b \partial d}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial c^2}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial c \partial d}$, $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial d^2}$ eine lineare Relation mit rationalen Coefficienten besteht.

4) In betr. der Abhängigkeit von den Exponenten behaupten wir: $\mathcal{P}$ ist eine eindeutige ganze Function der Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, p, q, r$.

Es folgt dies ohne Weiteres dadurch, daß unsere über geschlossene Wege geführten Integrale für jedes Werthsystem der Exponenten ihre Bedeutung behalten. Betrachten wir insbesondere die Fundamentallösung $\mathcal{P}(ac) = \mathcal{P}\, q - \frac{\beta+\delta+1}{2}$. Dieselbe ist, wie wir wissen, abgesehen von einer Potenz von -1, welche selbst eine eindeutige ganze Function der Exponenten ist, gleich dem Integral:

$$x^{q-\frac{\beta+\delta+1}{2}}(1-x)^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}} \int_{\mathfrak{B}} u^{\alpha}(1-u)^{\gamma}(1-xu)^{\delta}\, du\,.$$

Dieses aber ließ sich in eine hypergeometrische Reihe umsetzen:

$$= \frac{\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma+2)} \cdot x^{q-\frac{\beta+\delta+1}{2}}(1-x)^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}} \cdot F(\alpha, -\delta, \alpha+\gamma+2, x$$

Die hypergeometrische Reihe wird nun zwar ∞, wenn $\alpha+\gamma+2=0$ oder eine negative ganze Zahl wird;

gleichzeitig verschwindet aber auch die mit ihr multiplicirte Function $\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$, so daß das Ganze endlich bleibt.

Eine Eigenschaft, eine ganze Function der Exponenten zu sein, tritt beispielsweise bei der für $\mathfrak{P}(x)$ in der vorigen Stunde gegebenen Reihenentwicklung hervor, indem die vorkommende hypergeometrische Reihe $F(\alpha-\delta, \alpha+\beta+\ell, x)$ gerade durch $\Gamma(\alpha+\beta+2)$ dividirt ist, so daß das Unendlichwerden, welches sich sonst einstellen würde, wenn $\alpha+\beta+2=0$ oder eine negative ganze Zahl ist, genau compensirt wird.

5) Die weiteren Γ-Factoren $\Gamma(-\alpha)$ und $\Gamma(-\beta)$ bewirken, daß $\mathfrak{P}(x)$ identisch verschwindet, wenn α oder $\beta = 0$ oder eine positive ganze Zahl ist.

Dieses identische Verschwinden von $\mathfrak{P}(x)$ folgt sofort, wenn wir bedenken, daß der Doppelumlauf

um die Punkte a, c sich auf einen der beiden Punkte zusammenziehen läßt, sobald a oder c aufhört, für den Integranden singulär zu sein.

6) Die Doppelumläufe um je 2 Punkte allein ergeben gerade die verschiedenen Fundamentallösungen, jede aber mit einem ganz bestimmten Anfangscoefficienten der Reihenentwicklung behaftet, wie dies

aus folgender Tabelle ersichtlich ist:

$\mathcal{P}(ad) = \mathcal{P}\ p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}$	Anfangscoefficient		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\delta)\Gamma(\alpha+\delta+2)}$
$\mathcal{P}(bc) = \mathcal{P}\ p + \frac{\beta+\gamma+1}{2}$	"		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\gamma)\Gamma(\beta+\gamma+2)}$
$\mathcal{P}(bd) = \mathcal{P}\ q + \frac{\beta+\delta+1}{2}$	"		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\beta)\Gamma(-\delta)\Gamma(\beta+\delta+2)}$,
$\mathcal{P}(ca) = \mathcal{P}\ q + \frac{\alpha+\gamma+1}{2}$	"		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\gamma)\Gamma(\alpha+\gamma+2)}$,
$\mathcal{P}(cd) = \mathcal{P}\ r + \frac{\gamma+\delta+1}{2}$	"		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(-\delta)\Gamma(\gamma+\delta+2)}$,
$\mathcal{P}(ab) = \mathcal{P}\ r + \frac{\alpha+\beta+1}{2}$	"		$\frac{4\pi^2}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2)}$

Damit haben wir ganz bestimmte Factoren festgelegt, mit denen die Reihenentwicklungen dieser 6 Fundamentallösungen beginnen sollen.

Diese Festlegung der numerischen Constanten ist nun, wie wir schon früher (S. 93) angaben, für die Bestimmung der Coefficienten in den Zusammenhangsformeln zwischen den zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentallösungen besonders wichtig.

Für das Problem, die Anfangscoefficienten der Fundamentallösungen so festzulegen, daß die Coefficienten der Zusammenhangsformeln möglichst einfach werden, hat Bolza in Math. Ann. Bd. 42 zwei verschiedene Methoden angegeben. Unsere aus den Integralen abgeleitete Festsetzung stimmt mit keiner der beiden Bolza'schen Vorzügungen überein, sondern stellt sich

neben dieselben als eine dritte Möglichkeit. [Fr. d. 8 Dec. 93.]
Ich führe für die Exponenten der P-Function $p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ u. s. w. die Bezeichnungen $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \nu', \nu''$ ein, für die Differenzen derselben die Bezeichnungen

$$\lambda' - \lambda'' = \lambda, \quad \mu' - \mu'' = \mu \qquad \nu' - \nu'' = \nu.$$

Wir haben also die Riemann'sche P-Function:

$$P \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{array} \right| .$$

Kennzeichnen wir die mit dem Anfangscoefficienten 1 beginnenden Fundamentallösungen durch den untern Index 0, so haben wir für die $P_0^{\lambda'}, P_0^{\lambda''}, P_0^{\mu'}, P_0^{\mu''}, P_0^{\nu'}, P_0^{\nu''}$ Zusammenhangsformeln, welche aus einer von ihnen, etwa der folgenden, durch Buchstabenvertauschung entstehen:

$$P_0^{\lambda'} = \frac{\Gamma(\lambda'-\lambda''+1)\Gamma(\nu''-\nu')}{\Gamma(-\lambda''-\mu'-\nu'+1)\Gamma(-\lambda''-\mu''-\nu'+1)} P_0^{\lambda''} + \frac{\Gamma(\lambda'-\lambda''+1)\Gamma(\nu'-\nu'')}{\Gamma(-\lambda''-\mu'-\nu''+1)\Gamma(-\lambda''-\mu''-\nu''+1)} P_0^{\nu''} \text{ *)}$$

Führen wir die Werte der $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \nu', \nu''$ hierein ein:

$$\lambda' = p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}, \quad \mu' = q + \frac{\beta+\delta+1}{2} \qquad \nu' = r + \frac{\gamma+\delta+1}{2}$$

$$\lambda'' = p - \frac{\alpha+\delta+1}{2} \quad \mu'' = q - \frac{\beta+\delta+1}{2} \qquad \nu'' = r - \frac{\gamma+\delta+1}{2}$$

so heißt die Formel:

$$P_0^{p+\frac{\alpha+\delta+1}{2}} = \frac{\Gamma(\alpha+\delta+2)\Gamma(-\gamma-\delta-1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\delta)} P_0^{r+\frac{\gamma+\delta+1}{2}} + \frac{\Gamma(\alpha+\delta+2)\Gamma(\gamma+\delta+1)}{\Gamma(-\gamma)\Gamma(\delta+1)} P_0^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}$$

*) vergl. die Entwicklungen auf pag. 77.

Durch Einsetzung der gestern definirten Fundamentalzweige $\mathcal{P}^{p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2}}$ u. s. w. statt der $\mathcal{P}$, ergibt sich

$$\mathcal{P}^{p+\frac{\alpha+\delta+1}{2}} = \frac{\Gamma(-\gamma-\delta-1)\Gamma(+\gamma+\delta+2)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\mathcal{P}^{r+\frac{\gamma+\delta+1}{2}} + \frac{\Gamma(-\alpha-\beta-1)\Gamma(+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(-\delta)\cdot\Gamma(\delta+1)}\mathcal{P}^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}$$

und hieraus mit Hülfe des Complementensatzes:

$$\sin(\gamma+\delta+1)\pi\cdot\mathcal{P}^{p+\frac{\alpha+\delta+1}{2}} = \sin\alpha\cdot\mathcal{P}^{r-\frac{\alpha+\beta+1}{2}} - \sin\delta\cdot\mathcal{P}^{r-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}$$

Indem wir die Fundamentalzweige der $\mathcal{P}$-Function mit denjenigen Factoren einführen, welche bei den Doppelumläufen des Integrals herauskommen, vereinfachen sich die Zusammenhangsrelationen in der Art, daß statt der Γ trigonometrische Functionen, Sinusfunctionen auftreten.

Wie schon gesagt, bekommt Bolza infolge einer andern Verfügung über die Constanten andere Coefficienten; doch sind seine Coefficienten ebenfalls trigonometrische Functionen.

Soviel über die Zusammenhangsrelationen. Um vollständig zu sein, müssen wir auch noch von den Ausnahmefällen der $\mathcal{P}$-Function handeln, von den Ausnahmefällen erster Ordnung, wo logarithmische Glieder auftreten, und von denjenigen zweiter Ordnung, wo die logarithmischen Glieder

wieder verschwinden.

Die Ausnahmefälle treten ein, wenn eine der 6 Zahlen $\alpha+\delta+1$, $\beta+\gamma+1$, $\beta+\delta+1$, $\alpha+\gamma+1$, $\gamma+\delta+1$, $\alpha+\beta+1$ 0 oder eine ganze Zahl ist.

Es zeigt sich, daß, wenn $\alpha+\delta+1$, und also auch $\beta+\gamma+1$ eine ganze Zahl ist, die beiden Integrale $\mathcal{P}^{(ad)}$ und $\mathcal{P}^{(bc)}$ aufhören, linear unabhängig zu sein. sind $\beta+\delta+1$ und $\alpha+\gamma+1$ ganze Zahlen, so sind $\mathcal{P}^{(bd)}$ und $\mathcal{P}^{(ac)}$, wenn endlich $\gamma+\delta+1$ und $\alpha+\beta+1$ ganze Zahlen sind, so sind $\mathcal{P}^{(cd)}$ und $\mathcal{P}^{(ab)}$ linear abhängig.

In diesen drei Fällen hören die $\mathcal{P}^{(ad)}$ und $\mathcal{P}^{(bc)}$, die $\mathcal{P}^{(bd)}$ und $\mathcal{P}^{(ac)}$, die $\mathcal{P}^{(cd)}$ und $\mathcal{P}^{(ab)}$ auf, linear unabhängig zu sein, sind also nicht mehr als Basiszweige der binären Schar von Functionszweigen brauchbar, und man muß sich durch einen Grenzübergang eine neue unabhängige Lösung verschaffen. Es ist dies ganz dasselbe Verfahren, welches wir früher eingeschlagen hatten, nur völlig symmetrisch in der Bezeichnung, und ist übrigens bei Schellenberg des Näheren nachzusehen. —

Wir denken uns nun umgekehrt die Riemann'sche $\mathcal{P}$-Function gegeben, und fragen uns, wie wir dieselbe durch ein Integral darstellen können?

Die P-Function sei

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & d = x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{matrix}\right| .$$

Wir können zu setzen:

$$\lambda', \lambda'' = p \pm \frac{\alpha+\delta+1}{2}; \quad \mu', \mu'' = q \pm \frac{\beta+\delta+1}{2}; \quad \nu', \nu'' = r \pm \frac{\gamma+\delta+1}{2}.$$

Dabei bleibt es aber noch ganz willkürlich, ob wir $\lambda' = p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ und $\lambda'' = p - \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ setzen, oder umgekehrt. $\lambda' = p - \frac{\alpha+\delta+1}{2}$ und $\lambda'' = p + \frac{\alpha+\delta+1}{2}$. Dieselbe Willkür bleibt bei μ', μ'' und ν', ν''.

Da wir hier nach Belieben das $\pm$ Zeichen wählen können, so bekommen wir <u>im Ganzen 8 verschiedene Integrale</u>, welche die nämliche P-Function darstellen.

Wir berechnen

$$p = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}, \quad q = \frac{\mu' + \mu''}{2}, \quad r = \frac{\nu' + \nu''}{2}$$

$$\alpha + \delta + 1 = \pm \lambda, \quad \beta + \delta + 1 = \pm \mu, \quad \gamma + \delta + 1 = \pm \nu,$$

und aus den letzten Gleichungen folgt dann durch Addition und Berücksichtigung der Relation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -2$ zunächst der Wert von δ, dann α, β, γ und zwar wird:

$$\alpha = \frac{\pm\lambda \mp \mu \mp \nu - 1}{2}, \quad \beta = \frac{\mp\lambda \pm \mu \mp \nu - 1}{2}, \quad \gamma = \frac{\mp\lambda \mp \mu \pm \nu - 1}{2}, \quad \delta = \frac{\pm\lambda \pm \mu \pm \nu - 1}{2}$$

Man erhält also thatsächlich gerade 8 Integralausdrücke.

Aus einer Verfügung über die Vorzeichen der λ, μ, ν kann man alle andern erhalten, indem man einmal die Vorzeichen von zweien derselben umkehrt, ein andermal die Vorzeichen von allen dreien umkehrt. Kehrt man aber die Vorzeichen von zweien der Zahlen λ, μ, ν um, so vertauschen sich die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ paarweise, kehrt man alle Vorzeichen um, so gelangt man von α zu $-\alpha-1$, von β zu $-\beta-1$ u. s. w.

Die 8 zusammengehörigen Integrale leiten sich auf folgende Weise aus einem beliebigen von ihnen ab: Hat das Ausgangsintegral die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, dann bekommt man eine erste Gruppe von 4 Integralen, indem man diese Exponenten paarweise vertauscht, man bekommt eine zweite Gruppe von vier Integralen, indem man in jedem Integral der ersten Gruppe $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $-\alpha-1, -\beta-1, -\gamma-1, -\delta-1$ ersetzt.

Zu den 8 Integralen gehören also folgende Exponentensysteme:

1	2	3	4	1'	2'	3'	4'
α	δ	γ	β	$-\alpha-1$,	$-\delta-1$,	$-\gamma-1$,	$-\beta-1$,
β	γ	δ	α	$-\beta-1$,	$-\gamma-1$,	$-\delta-1$,	$-\alpha-1$,
γ	β	α	δ	$-\gamma-1$,	$-\beta-1$,	$-\alpha-1$,	$-\delta-1$,
δ	α	β	γ	$-\delta-1$,	$-\alpha-1$,	$-\beta-1$,	$-\gamma-1$.

Da die Zahlen p, q, r eindeutig bestimmt sind, d.h. bei verschiedener Wahl der Vorzeichen von λ, μ, ν nicht wechseln, so kann man wie vom Integral P so auch von dem durch Division mit $((ad)(bc))^p((bd)(ca))^q((cd)(ab))^r$ daraus hervorgehenden Integral

$$\Pi = (ab)^{-\frac{\alpha+\beta+1}{2}}(\alpha c)^{-\frac{\alpha+\gamma+1}{2}}(ad)^{-\frac{\alpha+\delta+1}{2}}(bc)^{-\frac{\beta+\gamma+1}{2}}(bd)^{-\frac{\beta+\delta+1}{2}}(cd)^{-\frac{\gamma+\delta+1}{2}}$$

$$\int (ua)^{\alpha}(ub)^{\beta}(uc)^{\gamma}(ud)^{\delta}(u, du)$$

behaupten, daß dasselbe bei jeder der 8 Verfügungen dieselbe Formenschaar darstellt.

Unser Theorem kann als ein reines Theorem über bestimmte Integrale gefaßt werden, welches aussagt, daß das vorstehende Integral hingeführt über einen geschlossenen Umlauf ungeändert bleibt, wenn man seine Exponenten auf die angegebenen 8 Weisen umsetzt, und zugleich den Integrationsweg in bestimmter Weise verlegt.

Es wäre nun natürlich auch zu versuchen, dieses Theorem über Integrale allein durch Methoden der Integralrechnung zu beweisen. Man sieht:

Die Gleichheit der 4 ersten Integrale ergibt sich sofort, wenn man u einer linearen Transformation unterwirft, bei der sich die a, b, c, d paarweise verdrehen.

Ebenso ist die Gleichheit der 4 letzten Integrale

untereinander zu beweisen.

Schwieriger ist es dagegen, die Gleichheit eines Integrals der ersten Gruppe mit einem solchen der zweiten Gruppe unmittelbar zu beweisen *).

Riemann sagt darüber: „Die übrigen Gleichungen erfordern, so weit ich sie untersucht habe, zu ihrer Bestätigung durch Methoden der Integralrechnung die Transformation von vielfachen Integralen."

Ho. d. 11. Dez. 93]

Das Integral Π der letzten Stunde hängt nur von den Exponentendifferenzen $\lambda = \lambda' - \lambda''$, $\mu = \mu' - \mu''$, $\nu = \nu' - \nu''$, nicht von den Exponenten selbst ab. Dies wurde dadurch erreicht, daß von dem Integral $\mathcal{P}$ ein Factor mit den Exponenten $p = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}$, $q = \frac{\mu' + \mu''}{2}$, $r = \frac{\nu' + \nu''}{2}$ abgetrennt wurde.

Denselben Process werden wir auch ohne Rücksicht auf die Integraldarstellung an der Function

$$\mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix}$$

ausführen können. Allgemein kann man, ohne die charakteristischen Eigenschaften der $\mathcal{P}$-Function zu zerstören, einen Factor der Gestalt $x^l(1-x)^n$ abtrennen. Das Verhalten der übrigbleibenden Function

*) Ich bringe in Vorschlag, die conformen Abbildungen zu vergleichen, welche die beiden unbestimmten Integrale $\int (ua)^\alpha (ub)^\beta (uc)^\gamma (ud)^\delta (u\,du)$

an den drei singulären Punkten ändert sich dann nur in der Weise, daß die Exponenten bei 0 um l, die bei 1 um n vermindert, die bei ∞ um $l+n$ vergrößert sind, d.h. es ist:

$$\mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} = x^{l}(1-x)^{n}\cdot\mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda'-l & \mu'+l+n & \nu'-n & x \\ \lambda''-l & \mu''+l+n & \nu''-n & \end{vmatrix}.$$

Bei dieser Veränderung bleiben die Differenzen $\lambda = \lambda' - \lambda''$ u.s.w. der Exponenten in den einzelnen Punkten ungeändert.

Wir möchten nun durch passende Wahl der Zahlen l, n bewirken, daß im Ausdruck der übrig bleibenden $\mathcal{P}$-Function nur die <u>Exponentendifferenzen</u> λ, μ, ν in symmetrischer einfacher Weise auftreten. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich. Wir können zwar bewirken, daß für zwei der singulären Punkte, etwa für 0 und 1, je ein Exponent verschwindet, der andere gleich der Exponentendifferenz wird, dann sind aber die Exponenten bei ∞ im Allgemeinen beide von 0 verschieden, wie die Formel zeigt:

$$\mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} = x^{\lambda'}(1-x)^{\nu''}\cdot\mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda & \mu'+\lambda''+\nu'' & \nu & x \\ 0 & \mu''+\lambda''+\nu'' & 0 & \end{vmatrix}.$$

---

und $\int (u-a)^{-1-\alpha}(u-b)^{-1-\beta}(u-c)^{-1-\gamma}(u-d)^{-1-\delta}(u\,du)$ von der u-Ebene entworfen.

Indem wir die P-Function durch Herausziehen von Factoren der Form $x^l(1-x)^n$ modificiren, kommen wir doch zu keiner symmetrischen Normalform derselben.

Das wird jedoch anders, wenn wir in Uebereinstimmung mit unseren Integralformeln von den Functionen der Variablen x zu homogenen Functionen, d. h. Formen zweier Variablen x_1, x_2 übergehen. Wir schreiben nämlich

$$x = \frac{x_1}{x_2}$$

(wobei wir für später festsetzen, daß keine der Größen x_1, x_2 irgendwo unendlich werden, und nie beide gleichzeitig verschwinden).

Ziehen wir nun von unserer P-Function die Form $x_1^l x_2^m (x_2 - x_1)^n$ als Factor heraus, so bleibt jetzt eine Formenschaar von $x_1 x_2$ vom Grade $-l-m-n$ übrig, von welcher sich bei $x=0$, d. h. $x_1=0$ ein Zweig wie $x_1^{\lambda'-l}$, ein anderer Zweig wie $x_1^{\lambda''-l}$ verhält, bei $x=\infty$ d. h. $x_2=0$ ein Zweig wie $x_2^{\mu'-m}$, ein anderer wie $x_2^{\mu''-m}$, bei $x=1$. d. h. $x_1=x_2$ ein Zweig wie $(x_2-x_1)^{\nu'-n}$, ein anderer wie $(x_2-x_1)^{\nu''-n}$. Eine solche Formenschaar bezeichnen wir ganz analog der Riemann'schen P-Function mit einem Functionszeichen Π; wir haben also die Formel:

$$P\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{vmatrix} = x_1^{\,l} x_2^{\,m} (x_1 - x_2)^n \Pi \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda'-l & \mu'-m & \nu'-n & x_1, x_2 \\ \lambda''-l & \mu''-m & \nu''-n & \end{vmatrix}$$

Durch Einführung dieser Formenschar Π wird es uns nun möglich alle 3 Exponentenpaare zu ändern, dabei ändert sich natürlich der Grad der Form, welcher immer die Hälfte der um 1 verminderten Exponentensumme ist.

Jetzt können wir die Π-Form so normiren, wie wir es erst mit der P-Function beabsichtigten.

Und zwar sind zwei Normirungen besonders wichtig.

1.) Die Normalform erster Art erhält man, wenn man $l = \frac{\lambda' + \lambda''}{2}$, $m = \frac{\mu' + \mu''}{2}$, $n = \frac{\nu' + \nu''}{2}$ setzt.

Es bleibt dann übrig die Form vom Grade $-\frac{1}{2}$, welche nur von λ, μ, ν abhängt.

$$\Pi \begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ +\frac{\lambda}{2} & +\frac{\mu}{2} & +\frac{\nu}{2} & x_1, x_2 \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\frac{\nu}{2} & \end{vmatrix} =$$

Wir bekommen zunächst in völlig bestimmter Weise eine Normalform erster Art, welche in x_1, x_2 von der Dimension $-\frac{1}{2}$ ist und bei jedem singulären Punkte zwei einander entgegengesetzt gleiche Exponenten $\pm\frac{\lambda}{2}$ bezw. $\pm\frac{\mu}{2}$, $\pm\frac{\nu}{2}$ aufweist.

2.) Die Normalform zweiter Art entsteht, wenn

man $l = \lambda''$, $m = \mu''$, $n = \nu''$ wählt.

$$\Pi \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \lambda & \mu & \nu & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix} \right| .$$

Die Normalform zweiter Art hat drei verschwindende Exponenten, die andern Exponenten sind λ, μ, ν selbst und der Grad ist $\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}$.

Mit Rücksicht auf das unbestimmte Vorzeichen der drei Differenzen λ, μ, ν läßt sich die Normalform zweiter Art auf 8 Weisen herstellen, entsprechend den 8 Integralen der letzten Stunde.

Man wird fragen, ob man nicht unter diesen 8 verschiedenen Normal-Π zweiter Art irgend eines bevorzugen kann? Ja erweist es sich für manche Zwecke nützlich, die Vorzeichen so zu wählen, daß die reellen Teile der Exponenten λ, μ, ν sämtlich positiv sind (indem wir dabei für jetzt von dem Falle rein imaginärer λ, μ, ν absehen).

Nehmen wir insbesondere dasjenige Normal-Π zweiter Art, dessen λ, μ, ν positive reelle Teile haben, so erreichen wir dadurch, daß unsere Fundamentallösungen in den singulären Punkten durchaus endlich bleiben und daß also die Schaar der Formen Π überhaupt nur solche Formen enthält, welche in

der ganzen Ebene endlich sind.

Diese Bemerkung wird erst für später wichtig; jetzt wollen wir weiter von dem Normal-Π erster Art sprechen, welches mit der Schellenberg'schen Π-Form übereinstimmt.

Daß wir die abhängigen Functionen uns in solcher Weise als Formen von x_1, x_2 denken, ist allgemein wichtig, umsomehr als wir dadurch Anschluß an die formalen Processe der Invariantentheorie gewinnen.

Wir werden insbesondere versuchen, die Differentialgleichung der $\mathcal{P}$-Function in eine symmetrische Differentialgleichung von invariantem Charakter für die Π-Form umzusetzen.

Die $\mathcal{P}$-Function mit den singulären Punkten a b c genügt der Differentialgleichung.

$$0 = \mathcal{P}'' + \mathcal{P}' \left\{ \frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \frac{1-\mu'-\mu''}{x-b} + \frac{1-\nu'-\nu''}{x-c} \right\} + \frac{\mathcal{P}}{(x-a)(x-b)(x-c)} \cdot$$

$$\left\{ \frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{x-c} \right\}$$

Wir setzen nun zuerst

$$\mathcal{P} = (x-a)^{\frac{\lambda'+\lambda''}{2}} (x-b)^{\frac{\mu'+\mu''}{2}} (x-c)^{\frac{\nu'+\nu''}{2}} \cdot y.$$

Die Function y besitzt an den Stellen $0, \infty, 1$ bereits, wie die Form Π, die Exponenten $\pm\frac{\lambda}{2}, \pm\frac{\mu}{2}, \pm\frac{\nu}{2}$.

In der Nähe von $x = \infty$ wird wegen $\frac{\lambda'+\lambda'}{2} + \frac{\mu'+\mu''}{2} + \frac{\nu'+\nu''}{2} = \frac{1}{2}$

$$P = x^{\frac{1}{2}} P\left(\frac{1}{x}\right) \cdot y$$

Da nun $x = \infty$ für P kein singulärer Punkt ist, so verhält sich dort ein Zweig von P wie $\frac{1}{x} P_1\left(\frac{1}{x}\right)$, ein anderer wie $P_2\left(\frac{1}{x}\right)$; man kann diese beiden Zweige geradezu als Fundamentalzweige für den nicht-singulären Punkt ansehen. Dann folgt für y.

Der Punkt $x = \infty$ ist für die Functionen y ein singulärer Punkt, und zwar haben wir für den einen Fundamentalzweig in der Umgebung des Punktes $x = \infty$ eine Formel $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} P_1'\left(\frac{1}{x}\right)$ und für den andern Fundamentalzweig eine Formel $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} P_2'\left(\frac{1}{x}\right)$, so daß wir in unser Schema beim Punkte ∞ die Zahlen $\frac{3}{2}$ und $\frac{1}{2}$ als Exponenten eintragen und unserer Function also 4 singuläre Punkte zusprechen müssen.

$$y \begin{pmatrix} a & b & c & \infty & \\ +\frac{\lambda}{2} & +\frac{\mu}{2} & +\frac{\nu}{2} & +\frac{3}{2} & x \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\mu}{2} & -\frac{\nu}{2} & +\frac{1}{2} & \end{pmatrix}.$$

Uebrigens ist die Singularität des y im Punkte ∞ nur etwas äußerliches, davon herrührend, daß man die P-Function mit einem gewissen singulären Factor behaftet hat, und es soll daher der Punkt x

ein uneigentlich singulärer Punkt der Function y genannt werden. Die Singularität verschwindet, sobald wir den Quotienten der beiden zu $x = \infty$ gehörigen Fundamentalzweige betrachten.

Die Differentialgleichung rechnet sich für y folgendermaßen um:

$$v = y'' + y'\left\{\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}\right\} + \frac{y}{(x-a)(x-b)(x-c)}\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{4}x - \frac{a+b+c}{4} \\ -\frac{\lambda^2}{4}\frac{(a-b)(a-c)}{x-a} \\ -\frac{\mu^2}{4}\frac{(b-a)(b-c)}{x-b} \\ -\frac{\nu^2}{4}\frac{(c-a)(c-b)}{x-c} \end{array}\right\}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ und können dann mit Hülfe von $f(x)$ und seinen Ableitungen $f'(x)$ und $f''(x)$ die Differentialgleichung so schreiben:

$$f \cdot y'' + f' y' + \frac{f''}{8} y = \left\{\frac{\lambda^2}{4}\frac{(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{\mu^2}{4}\frac{(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{\nu^2}{4}\frac{(c-a)(c-b)}{x-c}\right\} y.$$

Endlich machen wir den entscheidenden Schritt der Einführung homogener Variabler, indem wir setzen:

$$y = x_2^{\frac{1}{2}}\, \Pi(x_1, x_2),$$

wo nun Π eine Form ist, welche wieder nur die singulären Punkte $a\ b\ c$ hat, sich also mit der früher so bezeichneten Form deckt.

Wir haben jetzt zu setzen: [Di. d. 12. Dez. 93.]

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \quad a = \frac{a_1}{a_2}, \quad b = \frac{b_1}{b_2}, \quad c = \frac{c_1}{c_2}, \quad f(x_1 x_2) = a_2 b_2 c_2 x_2^3 f(x) = (xa)(xb)(xc)$$

$$\frac{d}{dx} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \frac{d^2}{dx^2} = x_2^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$$

und erhalten so die Gleichung:

$$\frac{f(x_1 x_2) \frac{\partial^2 \Pi(x_1 x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial f(x_1 x_2)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Pi(x_1 x_2)}{\partial x_1} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 f(x_1 x_2)}{\partial x_1^2} \Pi(x_1 x_2)}{x_2^2 \cdot a_2 b_2 c_2} =$$

$$= \Pi(x_1 x_2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda^2}{4} \frac{(ab)(ac)}{(xa)} \\ + \frac{\mu^2}{4} \frac{(ba)(bc)}{(xb)} \\ + \frac{\nu^2}{4} \cdot \frac{(ca)(cb)}{(xc)} \end{array} \right\}$$

Es mögen in üblicher Weise die partiellen Ableitungen nach x_1 durch einen unter-Index 1, diejenigen nach x_2 durch einen Index 2 ausgedrückt werden. Mit Hülfe der Eulerschen Relationen für die homogenen Functionen drücken wir auf der linken Seite der Gleichung f und Π, so wie f_1 und Π_1, durch die zweiten Differentialquotienten aus

$$f_1 = \frac{1}{2}(f_{11} x_1 + f_{12} x_2), \qquad \Pi_1 = -\frac{2}{3}(\Pi_{11} \cdot x_1 + \Pi_{12} x_2),$$

$$f = \frac{1}{6}(f_{11} x_1^2 + 2 f_{12} x_2 + f_{22} x_2^2), \quad \Pi = +\frac{4}{3}(\Pi_{11} x_1^2 + 2 \Pi_{12} x_1 x_2 + \Pi_{22} x_2^2),$$

wodurch man erhält.

$$f_{22} \Pi_{11} - 2 f_{12} \Pi_{12} + f_{11} \Pi_{22} = 6 \Pi \cdot \left\{ \frac{\lambda^2}{4} \cdot \frac{(ab)(ac)}{(xa)} + \frac{\mu^2}{4} \frac{(ba)(bc)}{(xb)} + \frac{\nu^2}{4} \cdot \frac{(ca)(cb)}{(xc)} \right\}$$

Die links stehende Verbindung von zweiten Differentialquotienten ist aber nichts anderes als der in der Theorie der binären Formen als „zweite Überschiebung"

bekannte und mit $(f, \Pi)_2$ bezeichnete invariante Differentialausdruck.

Jetzt haben also in der That beide Seiten unserer Differentialgleichung vollständig symmetrische und invariante Gestalt. Durch unsere Formel:

$$(f\Pi)_2 = 6\Pi \cdot \left\{ \frac{\lambda^2}{4}\frac{(ab)(ac)}{(xa)} + \frac{\mu^2}{4}\frac{(ba)(bc)}{(xb)} + \frac{\nu^2}{4}\frac{(ca)(cb)}{(xc)} \right\}$$

ist die Thatsache, dass die Form Π mit Hülfe der Constanten λ, μ, ν von den drei Punkten a, b, c und von x invariant abhängt, ohne Weiteres ersichtlich.

Gerade so könnten wir versuchen, auch für die Normalform Π der zweiten Art, überhaupt für eine beliebige Form Π die homogene Formulirung der Differentialgleichung zu finden. Doch wollen wir dies nicht ausführen, sondern noch als Anhang einige Bemerkungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit mehr als 3 singulären Punkten machen.

Im hypergeometrischen Fall haben wir es mit einer Differentialgleichung mit 3 singulären Punkten zu thun, in welchen sich dieselbe durchweg regulär verhält, d.h. es gibt für jeden der singulären Punkte zwei Fundamentalzweige, die sich in erster Annäherung wie Potenzen verhalten, z.B. an der Stelle $x = a$ eine

Lösung $(x-a)^{\lambda'} P_1(x-a)$ und $(x-a)^{\lambda''} P_2(x-a)$. Als Grenzfall kann in der einen Lösung ein Logarithmus auftreten.

Die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung mit n singulären Punkten, welche in diesen sämtlich reguläres Verhalten zeigt, etwa bei a die Exponenten λ', λ'', bei b die Exponenten μ', μ'', ..., bei n die Exponenten $\tau' \tau''$ besitzt, lautet:

$$0 = \mathcal{P}'' + \mathcal{P}' \left\{ \frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \cdots + \frac{1-\tau'-\tau''}{x-n} \right\} + \frac{\mathcal{P}}{(x-a)\cdots(x-n)} \left\{ \frac{\lambda'\lambda''(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + \frac{\tau'\tau''(n-a)\cdots(n-m)}{x-n} + G_{n-4}(x) \right\}$$

Dabei müssen die Exponenten der Bedingung genügen

$$\lambda' + \lambda'' + \cdots + \tau' + \tau'' = n-2,$$

und $G_{n-4}(x)$ ist eine willkürlich bleibende ganze rationale Function $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades von x, welche also noch $n-3$ ganz willkürliche Parameter, die Coefficienten des Polynoms, enthält. Ich nenne diese $(n-3)$ Coefficienten die „accessorischen Parameter" der Differentialgleichung.

Wenn wir annehmen, daß die Summe der Exponenten $= n-2$ ist, so läßt sich in der That eine Differentialgleichung bilden, welche die gewünschten Eigenschaften hat. Diese Differentialgleichung ist noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält ein Polynom $(n-4)^{\text{ten}}$ Grades mit $n-3$ vollständig willkürlichen

Constanten, das nur für $n=3$ gerade wegfällt.

Die singulären Punkte und die zugehörigen Exponenten allein genügen also noch nicht, um die Differentialgleichung festzulegen, sondern es kommen daneben noch die sogenannten accessorischen Parameter in Betracht, die nur im hypergeometrischen Falle fehlen:

Die Zahl der Constanten überhaupt in der Differentialgleichung ist $4n-7$; nämlich: [Do. d. 14. Dez.

n singuläre Punkte, wovon 3 beliebig wählbar : $n-3$ Constant

$2n$ Exponenten, einer Bedingungsgleichung unterworfen : $2n-1$ "

accessorische Parameter : $n-3$ "

Sa. $4n-7$ Const

Im hypergeometrischen Falle wird $4n-7=5$, wie es sein muß.

In der Umgebung einer singulären Stelle, etwa a, existieren zwei Fundamentallösungen

$$P^{\lambda'} = (x-a)^{\lambda'} \left\{ a_0' + a_1'(x-a) + \cdots \right\},$$

$$P^{\lambda''} = (x-a)^{\lambda''} \left\{ a_0'' + a_1''(x-a) + \cdots \right\}.$$

Dabei steht es uns nun genau wie im hypergeometrischen Falle noch frei, die Größen a_0', a_0'' irgendwie als Functionen der Constanten der Differentialgleichung festzulegen.

Ich spreche darüber, ohne den Beweis völlig durchgeführt zu haben, den Satz aus:

Ich behaupte, daß wir die Constanten $a_2' \, a_2''$ immer so wählen können, daß die P ganze Functionen der Exponenten $\lambda' \, \lambda' \ldots \tau' \, \tau''$ sind.

Man wird versuchen wollen, sie zu ganzen Functionen auch der übrigen Größen, der $a, b, \ldots n$ und der accessorischen Parameter zu machen.

Zu dem Zwecke wird man, wie im hypergeometrischen Falle von der P-Funktion durch Homogenmachen zu Π-Formen übergehen können. Diese wird man normiren etc. Man kann auch hier die beiden Normal-Π aufstellen, das Normal-Π erster Art nur auf eine Weise, dasjenige zweiter Art auf 2^n verschiedene Weisen.

Normal-Π erster Art:

$$\Pi \left| \begin{array}{cccccc} a_1 a_2 & b_1 b_2 & \ldots & n_1 n_2 & & \\ +\frac{\lambda}{2} & +\frac{\mu}{2} & & +\frac{\tau}{2} & x_1 & x_2 \\ -\frac{\lambda}{2} & -\frac{\mu}{2} & & -\frac{\tau}{2} & & \end{array} \right| = (xa)^{\frac{\lambda'+\lambda''}{2}} (xb)^{\frac{\mu'+\mu''}{2}} \ldots (xn)^{\frac{\tau'+\tau''}{2}} \varphi,$$

Normal-Π zweiter Art:

$$\Pi \left| \begin{array}{cccccc} a_1 a_2 & b_1 b_2 & \ldots & n_1 n_2 & & \\ \lambda & \mu & & \tau & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & & 0 & & \end{array} \right| = (xa)^{\lambda''} (xb)^{\mu''} \ldots (xn)^{\tau''} \varphi.$$

Die Normalform erster Art ist auf eine einzige Weise herzustellen, die Normalform zweiter Art auf 2^n Weisen.

Wir können die Normalform zweiter Art so einrichten, daß die $\lambda, \mu, \ldots \tau$ einen positiven reellen Teil haben, worauf alle Lösungen P ganze Formen von x_1, x_2, sein werden.

Ebensogut, wie die Determinantenfactoren $(xa), (xb)$ u.s.w. können wir auch noch irgend welche Potenzen der Determinanten $(ab)\,(ac)\ldots(bc)\ldots(mn)$ in unsere Π-Formen aufnehmen, d.h. wir können die Fundamentallösungen noch mit bestimmten Determinantenfactoren dieser Art behaften.

Es ist die Frage, ob dadurch bei dieser Normalform zweiter Art die Fundamentallösungen bei jedem singulären Punkt so eingerichtet werden können, daß sie nicht nur ganze Functionen der Exponentendifferenzen $\lambda, \mu, \ldots \tau$ und der x_1, x_2 sind, sondern auch der a_1, a_2; b_1, b_2; ... n_1, n_2 und der accessorischen Parameter.

Die Ausrechnung der homogenen Differentialgleichung für die allgemeine Π-Form werde ich hier nicht ausführen, sondern nur einige diesbezügliche Citate geben.

1.) Hilbert in Math. Ann. 30 S. 22. 1887. hat für die hypergeometrische Reihe im Falle eines Polynoms die Differentialgleichung in homogener Gestalt

aufgestellt. Die Beschränkung auf abbrechende Reihen ist für die ältere Gewöhnung, homogene Variable nur für ganze rationale Funktionen zu benutzen, charakteristisch

2.) Klein: Ueber Normirung der linearen Differentialgl. 2. Ord } Math. Ann. Bd. 38.
Pick: Ueber eine Normalform gewisser Differentialgleichungen } (vergl. dort auch verschied. Citate)

3.) Hiesch: Zur Theorie der linearen Differentialgleichung mit rationalem Integral. Diss. Königsberg 1892. Mit der Beschränkung auf rationale Integrale schließt er noch an Hilbert an. Doch werden Differentialgleichungen beliebiger Ordnung behandelt, und in einer Note in den Schriften der Physikal.-ökon. Gesellsch. in Königsberg 1892 werden die Resultate für Differentialgleichungen mit überhaupt eindeutigem Integral erweitert.

4.) Walsch: Zur Geometrie der linearen Differentialgleichungen und binären Formen. Mittheilungen der deutschen Math. Gesellschaft zu Prag, 1892. Hierzu eine Notiz von Pick in den Wiener Berichten von 1892: Ueber adjungirte lineare Differentialgleichungen.

IV. Besprechung von Riemann's Abhandlung.

Ich stellte zu Anfang der Vorlesung als erstes Ziel derselben das Verständniß der Riemann'schen Arbeit

in Aussicht. Dieses Ziel haben wir nun soweit erreicht, daß wir beim Durchlesen von Riemanns Abhandlung den darin innegehaltenen Gedankengang besonders einfach und durchsichtig finden werden, während demjenigen, der nicht schon concrete Kenntnisse besitzt, die Riemann'sche abstracte, nicht von den Formeln, sondern von den wesentlichen Eigenschaften einer Function ausgehende Behandlungsweise, bei der die expliciten Darstellungsformeln erst nachträglich als abgeleitete Eigenschaften der Function sich einstellen, erfahrungsgemäß Schwierigkeiten zu bereiten pflegt.

Riemann untersucht die Functionen immer, indem er ihre definirenden Eigenschaften an die Spitze stellt und alles weitere, insbesondere die Formeln, welche für die Functionen gelten, aus diesen Eigenschaften ableitet.

Dieses Riemann'sche Verfahren erscheint nur so lange schwierig, als es sich an keine concreten Kenntnisse anlehnt. Sowie das letztere der Fall ist, erscheint es ganz besonders einfach und durchsichtig.

Wir könnten das auch so ausdrücken: Das Riemann'sche Verfahren ist wissenschaftlich vorzüglich, pädagogisch unbrauchbar. Man muß damit

nicht anfangen, sondern dasselbe ans Ende bringen. Ein erstes Beispiel dieser Riemann'schen Behandlungsweise ist seine Theorie der Abel'schen Integrale, welche von ihm als solche Functionen definirt werden, welche bei geschlossenen Umläufen auf der Riemann'schen Fläche um Constanten wachsen.

Der zweite Gegenstand, auf den Riemann seine Theorie anwendet, sind die linearen Differentialgleichungen. Hierher gehört zuerst die Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, dann aber, darüber hinausgehend, die aus seinem Nachlaß veröffentlichte Arbeit: Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten. Ges. Werke No. XXI.

In der Theorie der linearen Differentialgleichungen handelt es sich nach Riemann um die gleichzeitige Betrachtung von n Functionen $y_1, y_2 \ldots y_n$ auf einer Riemann'schen Fläche, welche bei der Umkreisung gewisser „Verzweigungpunkte auf der Fläche", so wie sonst bei geschlossenen Umläufen über die Fläche hin allemal lineare Substitutionen erfahren. Im hypergeometrischen Falle ist $n = 2$ zu setzen, es liegen 3 Verzweigungspunkte vor, und wir befinden uns auf der schlichten Ebene.

Wir wollen nun die einzelnen Nummern der Riemann'schen Arbeit über die hypergeometrische Function der Reihe nach kurz durchsprechen, um nachher noch auf einige besondere Punkte näher einzugehen.

In N°1. gibt Riemann die Definition der Function

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

Allgemein gehört bei Riemann zu einer Function die Gesamtheit ihrer analytischen Fortsetzungen. Die vorliegende Function soll in einer binären Schar von Functionszweigen enthalten sein, d. h. jeder ihrer bei analytischer Fortsetzung sich ergebenden Zweige soll eine lineare Function $c'P' + c''P''$ irgend zweier Zweige P', P'' sein.

[Fr. d. 15. Dec. 93] Des Weitern wird festgesetzt, daß alle Zweige der binären Schar überall einändrig und stetig seien, d. h. keine Verzweigungspunkte und keine ∞-Punkte besitzen, mit Ausnahme der Punkte a, b, c, woselbst je zwei spezielle Zweige sich verhalten sollen wie $(x-a)^{\alpha}\varphi_1(x-a)$ und $(x-a)^{\alpha'}\varphi_1'(x-a)$ bezw. wie $(x-b)^{\beta}\varphi_2(x-b)$ und $(x-b)^{\beta'}\varphi_2'(x-b)$, resp. wie $(x-c)^{\gamma}\varphi_3(x-c)$ und $(x-c)^{\gamma'}\varphi_3'(x-c)$.

Dabei sollen die Exponenten der Bedingung unterworfen sein:

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

Ferner aber fügt Riemann noch die Bestimmung hinzu, daß keine der Differenzen $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ eine ganze Zahl sei.

Diese letztere Bedingung ist eine wirkliche Einschränkung, indem dadurch nur der Bequemlichkeit halber gewisse hierhergehörige Functionen, nämlich die von uns besprochenen „Ausnahmefälle" fürs erste von der Betrachtung ausgeschlossen werden. Die Bedingung $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$ dagegen ist eine für die Definition wesentliche Bedingung, auf deren innere Bedeutung wir morgen noch des Näheren zurückkommen werden.

In No. 2 ist die Lehre von der Symmetrie des Symbols $P\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix}\right| x$ enthalten: Wir dürfen die drei Verticalreihen beliebig miteinander vertauschen, desgleichen die zu einem Punkte gehörigen Exponenten, wir dürfen mit den a, b, c, x simultane lineare Transformationen vornehmen — „lineare Transformation der P-Function" — und können endlich solche Producte von Potenzen herausetzen, welche nur bei a, b, c verzweigt sind:

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right| = \left(\frac{x-a}{x-b}\right)^{\delta} \cdot \left(\frac{x-c}{x-b}\right)^{\varepsilon} \cdot P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha-\delta & \beta+\delta+\varepsilon & \gamma-\varepsilon & x \\ \alpha'-\delta & \beta'+\delta+\varepsilon & \gamma'-\varepsilon & \end{matrix}\right| .$$

<u>No. 3 beschäftigt sich mit der Gruppe der P-Function.</u>

Das Bemerkenswerte ist hierbei, daß durch Angabe der Exponenten die Gruppe der P-Function im Wesentlichen bestimmt ist. Insbesondere werden die Zusammenhangsformeln

$$P^{\alpha} = \alpha_{\beta}\, P^{\beta} + \alpha_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha_{\gamma}\, P^{\gamma} + \alpha_{\gamma'}\, P^{\gamma'}$$
$$P^{\alpha'} = \alpha'_{\beta}\, P^{\beta} + \alpha'_{\beta'}\, P^{\beta'} = \alpha'_{\gamma}\, P^{\gamma} + \alpha'_{\gamma'}\, P^{\gamma'}$$

berechnet, wobei natürlich noch ein gewisses Maß von Unbestimmtheit bleibt, entsprechend dem Umstande, daß in der Definition der Zweige $P^{\alpha}\ P^{\alpha'}\ P^{\beta}\ P^{\beta'}\ P^{\gamma}\ P^{\gamma'}$ jeder Coefficient des ersten Entwicklungsgliedes beliebig bleibt.

Da es in unsern Formeln offenbar nur auf das Verhältnis dieser 6 Größen ankommt, so bleiben notwendig fünf unserer Coefficienten unbestimmt, und irgend drei werden durch die 5 übrigen ausgedrückbar sein.

<u>Von den 8 Coefficienten der Zusammenhangsformeln bleiben 5 willkürlich, insofern man in der Definition der Fundamentallösungen $P^{\alpha}, P^{\alpha'} \ldots$</u>

nach Belieben constante Factoren aufnehmen kann, und es sind also drei der Coefficienten durch die 5 andern zu bestimmen.

Diese Bestimmung geschieht nun in einfachster Weise durch den Satz, das eine gleichzeitige Umkreisung aller 3 singulären Punkte so viel ist, als wäre überhaupt kein singulärer Punkt umkreist worden. Einer solchen Umkreisung entspricht daher nothwendig die identische Substitution. Die spätere Durchführung des hierin liegenden Gedankens möge bei Riemann selbst nachgesehen werden. Beiläufig ergibt sich, daß die Exponentensumme

$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma'$ eine ganze Zahl sein muß.

In № 4 wird gezeigt, daß bis auf die nothwendigen willkürlichen Constanten die P-Function durch die in der Definition genannten Eigenschaften völlig bestimmt ist, d. h. daß nur eine einzige binäre Schar $c' P' + c'' P''$ existiren kann, welche die angegebenen Eigenschaften besitzt. Daß es überhaupt eine solche Schar gibt, wird aber, wohlverstanden, an dieser Stelle noch nicht bewiesen, nur daß es nicht mehrere geben kann. Für diesen Beweis ist es wesentlich, daß die Exponentensumme nicht nur eine ganze Zahl überhaupt, sondern gerade 1 ist.

<u>No 5.</u> enthält die <u>rationale Transformation der P-Function.</u> In No 2 wurde schon die lineare Transformation der P-Function angegeben, bei der an Stelle von x irgend irgend ein linearen Ausdruck $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ als Argument eingeführt wird. Jetzt wird darüberhinausgehend gefragt, ob man nicht, wenigstens bei speciellen P-Functionen, durch Substitution eines nichtlinearen rationalen Ausdrucks von x wieder eine P-Function von x erhalten kann, d. h. ob nicht

$$P\begin{vmatrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & R(x) \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{vmatrix} = P\begin{vmatrix} A & B & C & \\ A & B & T & x \\ A' & B' & T' & \end{vmatrix}$$

sein kann?

Es zeigt sich, daß das in der That für specielle Werte der Exponenten und für specielle Functionen $R(x)$ möglich ist. Doch wird diese ganze Theorie, deren Anfänge schon bei Euler liegen und die insbesondere von Kummer entwickelt wurde, von Riemann nicht erschöpfend behandelt; wir kommen bei späterer Gelegenheit darauf zurück.

Als Beispiel einer solchen rationalen Transformation sei nur das folgende herausgehoben:

$$P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \beta & \gamma & x^2 \\ \frac{1}{2} & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right| = P\left|\begin{matrix} -1 & \infty & +1 & \\ \gamma & 2\beta & \gamma & x \\ \gamma' & 2\beta' & \gamma & \end{matrix}\right|$$

Die speciellen P-Functionen, welche diese Transformationen, nämlich Ersetzung von x sei es durch x^2, oder durch $\sqrt{x}$ gestatten, nennt man Kugelfunctionen.

Kugelfunctionen sind also diejenigen besondern hypergeometrischen Functionen, bei denen diese Formel anwendbar ist, bei denen also entweder eine Exponentendifferenz $= \frac{1}{2}$ ist, oder bei denen zwei Exponentendifferenzen einander gleich sind.

Diese Transformation beruht augenscheinlich darauf, das der Punkt $x^2 = 0$ in der x Ebene überhaupt seinen singulären Charakter verliert, während der Punkt $x^2 = 1$ sich in die zwei Punkte $x = +1$ und $x = -1$ spaltet.

No 6 handelt von den verwandten Functionen. Zwei P-Functionen, deren Exponenten sich bezw. nur um ganze Zahlen unterscheiden, und welche dieselben Variablen haben:

$$P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right| \text{ und } P\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha+k & \beta+l & \gamma+m & x \\ \alpha'+k' & \beta'+l' & \gamma'+m' & \end{matrix}\right|,$$

(wobei natürlich $k+k'+l+l'+m+m'=0$ sein muß) nennt man verwandte P-Functionen.

Jetzt ist es aber besonders wichtig, wie Riemann in die innere Natur des Begriffs der Verwandtschaft eindringt:

Zwei verwandte P-Functionen haben dieselbe Gruppe, und umgekehrt, zwei P-Functionen mit derselben Gruppe sind in dem Sinne verwandt, daß sich ihre Exponenten bezw. nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Gerade diese Eigenschaft, daß verwandte Functionen dieselbe Gruppe besitzen, macht das innere Wesen der Verwandtschaft aus.

Verwandte Functionen sind nichts anderes als Functionen mit derselben Gruppe, und Riemann unternimmt es, von dieser Definition aus die Relationen zwischen verwandten Functionen zu entwickeln.

No 7 führt von den Relationen zwischen verwandten Functionen zur Differentialgleichung der P-Function, indem diese nichts anderes ist als die Relation zwischen den verwandten Functionen $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}$.

Von der Differentialgleichung aus folgt dann die Reihenentwicklung und die Darstellung durch das

bestimmte Integral, worin dann der Existenzbeweis für die Function P liegt.

№ 8 endlich gibt eine Uebersicht über die verschiedenen Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen, die man für dieselbe P-Function bilden kann. —

Nach diesem Ueberblick über die Anordnung der Riemann'schen Arbeit, der besonders deswegen nützlich sein mag, weil Riemann weder den einzelnen Teilen Ueberschriften gibt, noch die wichtigsten Sätze durch den Druck hervorhebt, wollen wir noch auf einige wichtigere Punkte besonders eingehen. [Mo. d. 18 Dez. 93]

Warum setzt Riemann fest, daß die Exponentensumme

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$$

sein soll, während aus № 3 doch nur folgt, daß dieselbe eine ganze Zahl sein muß?

Diese Festsetzung findet ihre Erklärung in № 4, was wir hier noch genauer untersuchen wollen, als es bei der ersten Besprechung geschehen ist.

Es seien $P\,P'$ irgend zwei linear unabhängige Zweige der P-Function; dieselben sind lineare Combinationen z. B. der zum Punkte a gehörigen Fundamentalzweige P^{α}, $P^{\alpha'}$:

$$P = a_{11}\, P^{\alpha} + a_{12}\, P^{\alpha'}$$
$$P' = a_{21}\, P^{\alpha} + a_{22}\, P^{\alpha'};$$

analog sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ lineare Functionen von $\mathfrak{P}^\beta \mathfrak{P}^{\beta'}$ und von $\mathfrak{P}^\gamma \mathfrak{P}^{\gamma'}$ und zwar jedesmal mit von 0 verschiedenen Determinanten des Coefficientensystems. Nun betrachtet man die Functionaldeterminante von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} - \mathfrak{P}' \frac{d\mathfrak{P}}{dx}.$$

Diese ist von der aus $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ gebildeten Functionaldeterminante nur um die Determinante der Zusammensetzungscoefficienten, d. h. nur um eine multiplicative Constante verschieden:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \frac{d\mathfrak{P}'}{dx} - \mathfrak{P}' \frac{d\mathfrak{P}}{dx} = \mathrm{Det} \cdot \left(\mathfrak{P}^\alpha \frac{d\mathfrak{P}^{\alpha'}}{dx} - \mathfrak{P}^{\alpha'} \frac{d\mathfrak{P}^\alpha}{dx} \right);$$

entsprechend drückt sich $\mathfrak{D}$ durch die Functionaldeterminante der $\mathfrak{P}^\beta, \mathfrak{P}^{\beta'}$, bezw. der $\mathfrak{P}^\gamma, \mathfrak{P}^{\gamma'}$ aus.

Diese Formeln lassen uns nun sofort das Verhalten der Function $\mathfrak{D}$ bei Umlaufen um die einzelnen Verzweigungspunkte erkennen, die wir der Einfachheit halber nach $0, \infty, 1$ legen, nämlich:

<u>Die Determinante $\mathfrak{D}$ ist in der x-Ebene eine multiplicative Function mit den Verzweigungspunkten $0, \infty, 1$ und den zugehörigen Multiplicatoren $e^{2i\pi(\alpha+\alpha')}, e^{2i\pi(\beta+\beta')}, e^{2i\pi(\gamma+\gamma')}$.</u>

Aber noch mehr: Im Punkte $x = 0$ haben $\mathfrak{P}^\alpha, \mathfrak{P}^{\alpha'}$ Entwicklungen folgender Art

$$\mathfrak{P}^\alpha = x^a (1 + a + x + \ldots) \qquad \mathfrak{P}^{\alpha'} = x^{a'} (1 + a' x + \ldots)$$

woraus für $\mathfrak{D}$ die Entwicklung folgt:

$$\mathfrak{D} = x^{\alpha+\alpha'-1}(\alpha'-a) + a'' x + \dots)$$

Ähnlich findet man für $c=1$ eine mit $(x-1)^{\gamma+\gamma'-1}$, für $b=\infty$ eine mit $\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+\beta'+1}$ beginnende Reihenentwicklung.

Die Potenzentwicklung von $\mathfrak{D}$ an der Stelle 0 beginnt mit dem Glied $x^{\alpha+\alpha'-1}$, diejenige an der Stelle ∞ mit $\left(\frac{1}{x}\right)^{\beta+\beta'+1}$, diejenige bei 1 mit $(x-1)^{\gamma+\gamma'-1}$.

Setzen wir nun

$$\mathfrak{D} = x^{\alpha+\alpha'-1}(x-1)^{\gamma+\gamma'-1} \cdot \Phi(x),$$

so ist die Function $\Phi(x)$ bei Umlaufen um 0, um 1 und jeden andern von ∞ verschiedenen Punkt, also auch bei Umlaufen um ∞ eindeutig, also unverzweigt; außerdem ist $\Phi(x)$ bei 0 und 1, ferner wegen der Voraussetzung, daß P und P' an allen von $0, 1, \infty$ verschiedenen Stellen endlich ist, auch an jeder andern endlichen Stelle endlich. $\Phi(x)$ muß also notwendig eine rationale ganze Function von x sein, und zwar, da $\mathfrak{D}$ bei ∞ von der Ordnung $\beta+\beta'+1$ verschwindet, d.h. von der Ordnung $-(\beta+\beta'+1)$ unendlich wird, eine solche vom Grade

$$k = -(\alpha+\alpha'-1) - (\gamma+\gamma'-1) - (\beta+\beta'-1)$$
$$= 1 - (\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma').$$

Diese Zahl muß, da es sich um eine ganze rationale

Function handeln soll, notwendig eine positive ganze Zahl oder 0 sein, d. h.

Vor allen Dingen sehen wir, daß die Exponentensumme nur folgende Werte haben darf:

$$+1,\quad 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

und daß unser Polynom Φ, wenn wir die Exponentensumme $= 1$ nehmen, schlichtweg eine Constante wird.

Was bedeutet es nun für die Functionen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, wenn wir die Exponentensumme kleiner als 1 nehmen, für Φ also ein wirkliches Polynom setzen? Zu dem Zwecke fragen wir weiter:

Was für Bedeutung für $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ haben die Verschwindungsstellen von $\Phi(x)$? Man hat diese von vornherein als von $0, 1, \infty$ verschieden anzunehmen, da ja alle bei 0 oder 1 verschwindenden Factoren in $x^{\alpha+\alpha'-1}$ bezw. $(x-1)^{\gamma+\gamma'-1}$ enthalten sind. (Denn da die Exponentendifferenzen $\alpha'-\alpha$ und $\beta'-\beta$ als von 0 verschieden vorausgesetzt sind, verschwindet das erste Glied der S. 223 hingeschriebenen Potenzentwicklung von $\mathfrak{D}$ nicht.)

Angenommen an der Stelle $x=\varrho$ verschwinde Φ von der Ordnung σ, d. h. es bestehe dort für Φ, also auch für $\mathfrak{D}$ eine Potenzentwicklung

$$\mathfrak{D} = (x-\varrho)^{\sigma}\, \mathfrak{P}(x-\varrho).$$

Wir wollen dann einen solchen Punkt ϱ einen <u>Nebenpunkt</u> von der Ordnung σ nennen.

Wie können sich nun P und P' an einem Nebenpunkt σter Ordnung verhalten? Dabei mögen für P und P' die beiden Fundamentalzweige für den Punkt gewählt sein, d.h. deren erste Entwicklungsglieder verschiedene Exponenten haben, etwa ν und ν', so daß $\nu' > \nu$ sei:

$$P = (x-\varrho)^{\nu}(1 + a(x-\varrho) + \cdots),$$
$$P' = (x-\varrho)^{\nu'}(1 + a'(x-\varrho) + \cdots).$$

Die Zahlen ν und ν' müssen dabei wegen der vorausgesetzten Unverzweigtheit ganze Zahlen sein, und zwar $\nu \geqq \sigma$ $\nu' \geqq 1$, damit nicht ein Zweig unendlich wird. Dann ergibt sich aber durch Ausrechnung für $\mathfrak{D}$ eine Entwicklung, deren erstes Glied $(\nu'-\nu)(x-\varrho)^{\nu+\nu'-1}$ lautet; es muß also $\nu+\nu'-1 = \sigma$ sein. Wir sagen: <u>Zu einem σ-fachen Nebenpunkte gehören zwei ganzzahlige positive Exponenten, deren Summe $= \sigma+1$ ist.</u>

Für $\sigma = 1$ finden wir nur die Möglichkeit $\nu = 0$, $\nu' = 2$, für $\sigma = 2$ die zwei Möglichkeiten $\nu = 0$, $\nu' = 3$ und $\nu = 1$, $\nu' = 2$. Dieser letzte Fall $\nu = 1$, $\nu' = 2$ läßt eine Reduction des Nebenpunktes auf einen gewöhnlichen Punkt durch Herausziehen des Factors

$(x-\varrho)^{\nu-1}$ zu, weil die Exponentendifferenz $= 1$ ist; d.h. für $\nu=1$ $\nu'=2$ haben wir es mit einem „uneigentlich singulären Punkt" unserer früheren Benennung zu thun. Dieser Fall kann, wie man sieht, nur für geradzahlige Werte von σ sich einstellen. Alle anderen Fälle liefern notwendig wirkliche singuläre Punkte. Andererseits werden wir sagen:

Die Exponentendifferenz in dem Punkte ϱ ist ganzzahlig; es liegt also ein „Ausnahmefall" vor, da aber keine Logarithmen auftreten, ein solcher „zweiter Ordnung"

Ein Nebenpunkt gehört als singulärer Punkt angesehen auf alle Fälle zu den Ausnahmefällen zweiter Ordnung, insbesondere aber kann er für $\sigma = 2, 4, 6, \ldots$ ein uneigentlich singulärer Punkt sein, d.h. ein Punkt, der seinen singulären Charakter verliert, wenn ich die P-Function von einem Factor befreie.

Diese Nebenpunkte sind insofern für die Definition der P-Funktion nebensächlich und heißen darum Nebenpunkte, weil eine Umlaufung derselben keinen Beitrag zur Gruppe derselben gibt, vielmehr die identische Substitution liefert.

Sehe ich einen σ-fachen Nebenpunkt an, wie σ zusammengerückte einfache Nebenpunkte, so darf ich sagen:

Unsere P-Function besitzt, wenn wir den Grad des

Polynoms mit k bezeichnen, genau k einfache Nebenpunkte und die Festsetzung $k=0$ läuft also darauf hinaus, das Auftreten von Nebenpunkten auszuschliessen.

In welchem Zusammenhange stehen nun diese allgemeineren P-Functionen mit denen ohne Nebenpunkte? Ich sage:

Diejenigen P-Functionen, welche eine Exponentensumme haben, die von 1 verschieden ist, für die also $K>0$ ist, lassen sich in einfacher Weise aus verwandten P-Functionen der gewöhnlichen Art linear zusammensetzen.

Dieser Satz ist für die weiteren Ideen von Riemann, wie man sie in seinen hinterlassenen Fragmenten vorfindet, fundamental. Aber nur an einer Stelle in den nachgelassenen Papieren in № 17 der Abhandlung: Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung (Ges. Werke XVII) kommt eine hierauf bezügliche Entwicklung vor. Dort kommt Riemann zu einer der P-Function ganz analog gebildeten Function

$$Q\left|\begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right|$$

bei der aber die Exponentensumme statt +1 ist, welche also $K=2$ Nebenpunkte besitzt.

Riemann zeigt, wie man eine solche Function durch eine gewöhnliche $\mathcal{P}$-Function und ihren Differentialquotienten darstellen kann. Auf dieselbe Weise hätte er sie, allgemein zu reden, aus zwei verwandten $\mathcal{P}$-Functionen herstellen können.

Ich will dies nur für $K=1$ genauer auseinandersetzen. Es seien

$$\mathcal{P}_1 \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right| \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_2 \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha-1 & \beta+1 & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right|$$

$$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'+\gamma+\gamma'=1$$

zwei verwandte gewöhnliche $\mathcal{P}$-Functionen, d. h. $\mathcal{P}$-Functionen ohne Nebenpunkte.

Irgend zwei Zweige $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ der ersten $\mathcal{P}$-Function und zwei entsprechende Zweige $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_2'$ der zweiten $\mathcal{P}$-Function erleiden bei Umläufen von x immer je dieselben Substitutionen. Bildet man nun aus den Zweigen Paare entsprechender Zweige mit Hülfe zweier Constanten λ_1, λ_2 die Functionen

$$Q = \lambda_1 \mathcal{P}_1 + \lambda_2 \mathcal{P}_2$$

$$Q' = \lambda_1 \mathcal{P}_1' + \lambda_2 \mathcal{P}_2',$$

so erleiden offenbar Q und Q' ebenfalls bei Umläufen

dieselben Substitutionen.

In der Nähe von $x = a$ ist das niedrigste Entwicklungsglied von P_1 von der Ordnung α, dasjenige von P_2 von der Ordnung $\alpha - 1$, das niedrigste Glied von Q also von der Ordnung $\alpha - 1$. Q' besitzt bei $x = a$ als niedrigsten Exponenten α'; da P_1' und P_2' beide diesen niedrigsten Coefficienten besitzen und über λ_1, λ_2 nichts specielles vorausgesetzt ist. In derselben Weise findet man als Exponenten von Q bei b die Werte β, β'; bei c γ und γ'; wir haben also das Schema:

$$Q \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ \alpha - 1 & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right|$$

mit der Exponentensumme 0, also 1 Nebenpunkt.

Um in allgemeinster Weise eine Function mit $K = 1$ zu bilden, brauche ich nur zwei verwandte P-Functionen P_1 und P_2, die in geeigneter Weise gewählt sind, zu $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ zusammenzusetzen.

Der allgemeine Satz lautet:

Um eine P-Function in allgemeinster Weise zu bilden, bei der K irgend einen vorgeschriebenen Wert hat, muß ich $K + 1$ verwandte P-Functionen der gewöhnlichen Art mit Hülfe constanter Coefficienten linear zusammensetzen.

[Di. d. 19 Dez. 93.]

Wir wollen heute das Thema der vorigen Stunde nicht weiter verfolgen, sondern ich will nur noch im Anschluss daran eine Frage stellen: Wie sieht die Differentialgleichung einer P. Function mit K Stellen aus? Vielleicht übernimmt Jemand die Bearbeitung.

Im Uebrigen will ich heute noch auf den Riemann'schen Begriff der <u>Verwandtschaft</u> näher eingehen, dessen Fassung, wie wir sehen werden, grosse Verallgemeinerungen einschliesst.

Zuerst geht Riemann noch von der älteren Notion aus, welche zwei Functionen verwandt nennt, deren Exponenten sich bez. um ganze Zahlen unterscheiden, es bildet aber sofort das innere Wesen des Begriffs hervor

<u>Verwandte Functionen sind gleichzeitige Functionen.</u>

In dieser Allgemeinheit hat der Begriff der Verwandtschaft eine viel grössere Anwendung.

z. B. zwei Integrale algebraischer Functionen

$$\int f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int \varphi(x)\,dx$$

sind verwandt, wenn sie bei allen Umläufen je um dieselben Periodicitätsmoduln wachsen.

Oder zwei multiplicative Functionen sind verwandt, wenn sie beide sich bei Umläufen des x um dieselben Factoren ändern.

Der von Riemann festgelegte Begriff der Verwandtschaft dehnt sich auf sehr viele allgemeinere Functionen gleichförmig aus.

Wie begründet nun Riemann die Existenz der Relationen zwischen verwandten Functionen:

$$r_1(x)\,\mathfrak{P}_1 + r_2(x)\,\mathfrak{P}_2 + r_3(x)\,\mathfrak{P}_3 = 0\ ?$$

Auch hier setzt Riemann an Stelle der bloss Thatsache den innern Grund. Wenn die Relation für die Zweige $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3$ gelten soll, muss sie auch für irgend drei andere entsprechende Zweige gelten:

$$r_1(x)\,\mathfrak{P}_1' + r_2(x)\,\mathfrak{P}_2' + r_3(x)\,\mathfrak{P}_3' = 0,$$

woraus dann folgt, dass sich $r_1(x) : r_2(x) : r_3(x)$ verhalten wie die Determinanten der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} \mathfrak{P}_1 & \mathfrak{P}_2 & \mathfrak{P}_3 \\ \mathfrak{P}_1' & \mathfrak{P}_2' & \mathfrak{P}_3' \end{Vmatrix},$$

also $r_1(x) : r_2(x) : r_3(x) = \mathfrak{D}_{23} : \mathfrak{D}_{31} : \mathfrak{D}_{12}$.

Es ist leicht auszurechnen, dass diese Determinanten, multiplicative Functionen gleicher Gruppe von x, rationale Functionen von x multiplicirt mit einer Potenz von x und einer solchen von $x-1$ sind,

wobei sich die Exponenten dieser Potenzen bei den drei Determinanten nur um ganze Zahlen unterscheiden können; man kann dann die etwaigen Bruchpotenzen in der Proportion wegheben, und hat in der That eine lineare Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Riemann erkennt als den eigentlichen Kern der Relationen zwischen verwandten Functionen dies, daß die Determinanten $D_{23} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3' - \mathfrak{P}_2' \mathfrak{P}_3$, $D_{31} = \mathfrak{P}_3 \mathfrak{P}_1' - \mathfrak{P}_3' \mathfrak{P}_1$, $D_{12} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2' - \mathfrak{P}_1' \mathfrak{P}_2$ multiplicative Functionen von $\mathfrak{s}$ sind, die man direct berechnen kann.

Die Bedeutung der Determinanten liegt darin, daß sie gegenüber beliebigen linearen Substitutionen der $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ invariant sind, daß die Determinante eine Invariante der Gruppe ist.

Im Falle zweier verwandten Integrale würde in ganz entsprechender Weise die Differenz, für zwei verwandte multiplicative Functionen der Quotient eine Invariante, also eine rationale bezw. auf der Riemann'schen Fläche eine algebraische Function sein.

Ferner will ich heute noch einiges über Riemann's Behandlung von Gauß' Kettenbruch (S. 18) sagen, welche in seinem Nachlaß unter dem Titel:

„Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita." Ges. Werke XXIII. gegeben wird.

Gauß Kettenbruch stellt, wie wir früher lernten, den Quotienten zweier hypergeometrischen Reihen:

$$\frac{F(a, b+1, c+1, x)}{F(a, b, c, x)}$$

dar, im „speciellen Fall" für $b = 0$ die hypergeometrische Reihe

$$F(a, 1, c+1, x)$$

selbst.

Riemann bemerkt, daß es sich um den Quotienten correspondirender Zweige zweier verwandten P-Functionen handelt.

Während sich nun Gauß darauf beschränkt hat, das formale Gesetz des Kettenbruchs aufzustellen, ohne die Frage nach dem Rest desselben, d. h. der Differenz der anzunähernden Function und der n^{ten} Annäherungsfunction

$$\frac{F_1}{F_2} - \frac{p_n}{q_n} = R_n = ?$$

zu berühren,

zeigt Riemann, daß der Rest, welcher bleibt, wenn man den Kettenbruch an n^{ter} Stelle abbricht, sich ganz

einfach selbst durch P-Functionen ausdrücken lässt.

Im Zusammenhang damit behandelt er die Frage nach der Convergenz des Kettenbruchs.

Ein Kettenbruch ist eine Annäherung der Function durch eine Reihenfolge von rationalen Functionen, wie eine Potenzreihe eine Annäherung durch eine Reihenfolge ganzer rationaler Functionen von immer wachsendem Grad ist. Bei der Potenzreihe hat der Convergenzbereich bekanntermassen die Gestalt eines Kreises. Wie ist dies beim Kettenbruch?

Der Gauß'sche Kettenbruch stellt die Function in der Umgebung der 0-Stelle dar. Man hat also zu fragen, innerhalb welches um den 0-Punkt herumgelegten Bereiches der x-Ebene convergirt der Kettenbruch?

Von der Bestimmung des Restes aus beweist Riemann, dass der Kettenbruch, durch welchen $\frac{F_1}{F_2}$ in der Umgebung der 0-Stelle approximirt wird, in der ganzen Ebene convergirt, mit Ausnahme des inneren Stückes der reellen Axe, welches von +1 nach +∞ reicht.

Diese Resultate sind unabhängig von Riemann auch von anderer Seite aus gefunden worden.

Den Rest hat Heine in Crelle's Journ. Bd. 53, 1857

bestimmt, also gleichzeitig mit Riemann's Hauptarbeit über die P-Function. Die Convergenz des Gauß'schen Kettenbruchs hat Thomé in Crelle's Journ. Bd. 66, 67, 1866–67, untersucht. Beide kommen natürlich zu denselben Resultat wie Riemann.

Das Bemerkenswerthe an der Riemann'schen Arbeit sind aber nicht blos die Resultate sondern ganz besonders die einfache Methode der Herleitung, welche aus den innern Eigenschaften der Function heraus die Resultate erschließt.

Ich will hier noch auf eine an den „speciellen" Fall von Gauß Kettenbruch anschließende Verallgemeinerung hinweisen, die in anderer Richtung liegt.

Die F-Reihe, welche im „speciellen" Fall durch den Kettenbruch dargestellt wird, läßt sich einfach durch ein „unbestimmtes Integral ausdrücken, nämlich durch

$$\frac{1}{c \cdot x^c (1-x)^{a-c}} \int_0^x x^{c-1} (1-x)^{a-c-1} \cdot dx,$$ wie man sofort

durch blos einfache Entwickelung des Integranden zeigt.

Die Reihe des Gauß'schen speciellen Falls ist in ähnlicher Weise durch ein unbestimmtes Integral auszudrücken.

Wir können sagen: Es handelt sich bei Gauß im speciellen Falle um die Kettenbruchentwicklung des vorstehenden Integrals.

Diesen Ansatz hat man nun verallgemeinert, indem man allgemein Integrale von der Gestalt

$$\frac{1}{(x-a)^{\lambda}(x-b)^{\mu}\ldots}\int^{x}(x-a)^{\lambda-1}(x-b)^{\mu-1}\ldots dx$$

betrachtet hat. Darüber haben Heine, Heun und andere gearbeitet.*) insbesondere ist aber die demnächst im American Journal erscheinende Dissertation von Van Vleck zu nennen.

Indem die Untersuchung Van Vleck's den speziellen Fall des Gauß'schen Kettenbruchs ebenso umschließt, wie dies die allgemeinen Entwicklungen von Riemann thun, so wird es interessant sein, die Entwicklungen von Van Vleck und die Resultate von Riemann auch im Allgemeinen zu vergleichen.

Ich komme nun endlich noch auf einen letzten wichtigen Punkt zu sprechen. Den Existenzbeweis führt Riemann, wie wir sahen, indem er aus den Relationen zwischen verwandten Functionen die Differentialgleichung und hieraus die Reihendarstellungen und die bestimmten Integrale ableitet, welche expliciten Formeln ihm nun der

*) vergl. Heun ... Bd. 31 der math. Annalen, 1888.

Beweis der Existenz der Function sind.
Riemann wird hier gewissermaßen seinem eignen Princip untreu, indem er die Existenz auf die Formel gründet.

Und doch wird ein directer Existenzbeweis verlangt durch die Verallgemeinerungen der P-Function, welche Riemann selbst im Sinne hatte, wie wir dies in der nächsten Stunde noch ausführen wollen.

Nun für diese allgemeineren P-Functionen gibt es keine solchen expliciten Formeln, wie im einfachsten Fall.

Wie haben wir uns einen solchen Existenzbeweis zu denken?

Bei der hypergeometrischen P-Function sind die 3 Verzweigungspunkte gegeben, dazu können wir uns – da ja für $n=3$ durch die Exponenten die Gruppe im Wesentlichen bestimmt ist – die den Umlaufen um die einzelnen Punkte entsprechenden Substitutionen gegeben denken. Durch diese Substitutionen A, B, C sind dann die Exponenten nur erst bis auf ganze Zahlen bestimmt. Wir wollen uns daher neben den Substitutionen auch noch die zugehörigen Exponenten selbst, natürlich [illegible]

stimmung mit den Substitutionen, angeschrieben denken. So erhalten wir also folgendes Schema:

$$P \left| \begin{array}{cccc} a & b & c & \\ A & B & C & x \\ (\alpha) & (\beta) & (\gamma) & \end{array} \right|$$

Man sollte versuchen, für die Existenz einer Function welche diesem Symbol entspricht, ebenso einen directen Beweis zu finden, wie man dies in der Theorie der Abel'schen Functionen nach Riemann, Schwarz und Neumann für die Abel'schen Integrale thut, welche gewisse Periodicitätseigenschaften haben.

Dies ist der Gegenstand, welchen Schilling in seiner in Kürze erscheinenden Dissertation behandelt, worin er allerdings noch zu keinem vollständig befriedigenden Abschluß gelangt ist. Wir können erst sehr viel später auf die genauere Formulirung der bei Schilling vorliegenden Fragestellung eingehen. — [Do. d. 21. Dez 93.]

Heute wollen wir zum Schlusse noch den Gedankengang des Fragmentes aus Riemanns Nachlaß:

Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, Ges. Werke No. XXI, datirt v. 20. Febr. 1857, kurz darstellen.

Bei Riemann handelt es sich nun allerdings um Differentialgleichungen von beliebiger, n ter-

Ordnung, und mit algebraischen, nicht notwendig rationalen Coefficienten. Wir wollen uns aber hier darauf beschränken, den Riemann'schen Gedanken am Beispiel der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten zu erläutern.

Die allgemeinste reguläre Differentialgleichung 2. Ordn., welche an n gegebenen Punkten $a, b, .. n$ die Exponenten $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \ldots \tau', \tau''$ besitzt und sonst keine singulären Punkte hat, ist, wie wir wissen, in der Gestalt enthalten:

$$y'' + y'\left\{\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \cdots + \frac{1-\tau'-\tau''}{x-n}\right\} + \frac{y}{(x-a)\cdots(x-n)}\left\{\frac{\lambda'\lambda''(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + \frac{\tau'\tau''(n-a)\cdots(n-m)}{x-n} + G_{n-4}(x)\right\},$$

wobei wir die Coefficienten des Polynoms $G_{n-4}(x)$ die accessorischen Parameter genannt haben. Eine Constantenabzählung, die wir vorgenommen haben, ergab, daß die Differentialgleichung im Ganzen von $4n-7$ Constanten abhängt, wovon auf die Verzweigungspunkte $n-3$, auf die Exponenten $2n-1$, auf die accessorischen Parameter $n-3$ kommen.

Inzwischen haben wir bei der hypergeometrischen Differentialgleichung eine neue Idee benutzt, indem wir nämlich noch sogenannte „Nebenpunkte" einführten, für welche die Exponenten ganze Zahlen sind, und welche außerdem noch der Bedingung genügen, daß die logarith-

minenten Glieder, die bei ganzzahliger Exponenten-differenz im Allgemeinen auftreten, in Betracht zu ziehen.

Dieselbe können wir bei der allgemeinen Integration einführen. Es sei ρ ein solcher Nebenpunkt, und zwar der Kürze halber ein einfacher Nebenpunkt, seine Exponenten also 0 und 2. Die Differentialgleichung hat dann natürlich die allgemeine Gestalt einer Differentialgleichung mit den $n+1$ singulären Punkten $a, b, \ldots n, \rho$ und den Exponenten $\lambda', \lambda''; \mu', \mu''; \ldots \tau', \tau''; 0, 2$, also:

$$y'' + y'\left\{\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \cdots + \frac{1-\tau'-\tau''}{x-n} - \frac{1}{x-\rho}\right\} + \frac{y}{(x-a)\cdots(x-n)(x-\rho)}\left\{\frac{\lambda'\lambda''(a-b)\cdots(a-n)(a-\rho)}{x-a} + \cdots + \frac{\tau'\tau''(n-a)\cdots(n-\rho)}{x-n} + G_{n-3}(x)\right\} = 0$$

Da $G_{n-3}(x)$ einen Coefficienten mehr enthält, als $G_{n-4}(x)$, so könnte es scheinen, als ob sich die Zahl der Constanten in der Differentialgleichung durch Hinzunahme des Nebenpunktes außer der willkürlichen Lage des Nebenpunktes noch um 1 vermehrt hätte. In Wahrheit aber sind die $n-2$ Coefficienten von $G_{n-3}(x)$ noch einer Bedingungsgleichung unterworfen, welche besagt, daß beim Punkte ρ keine logarithmischen Glieder auftreten, so daß die Zahl der Constanten durch Hinzunahme des einen Nebenpunktes um $n+1$ vermehrt worden ist. Allgemein:

Indem wir k unpaare Nebenpunkte in unsere Differentialgleichung einführen, steigt die Constantenzahl auf $4n-7+k$, da der scheinbare Zuwachs in der Zahl der accessorischen Parameter gerade durch die Forderung compensirt wird, daß bei den Reihenentwicklungen in der Nähe der Nebenpunkte kein logarithmischen Glieder auftreten sollen.

Andererseits wollen wir die in der Gruppe einer Differentialgleichung mit n singulären Punkten enthaltenen Constanten abzählen. Wir werden in der Folge die Verbindung mit einer vorgelegten Differentialgleichung noch von verschiedenen „Gruppen" sprechen. Ich schlage daher vor, daß wir die hier vorliegende Gruppe mit Hermite die „Monodromiegruppe" der Differentialgleichung nennen, d.h. die Gruppe der Substitutionen, welche ein Lösungssystem y_1, y_2 längs solcher geschlossenen Wege der Variablen x erleidet, längs deren y_1, y_2 einändrig oder „monodrom" bleibt, d.h. längs solcher Wege, welche die Verzweigungspunkte vermeiden.

Die Monodromiegruppe besitzt n erzeugende Substitutionen $A, B, \ldots N$, von denen jede einem Umlaufe um einen einzelnen der Punkte $a, b, \ldots n$ entspricht. Jede dieser Substitutionen besitzt 4 Coefficienten.

Von den so sich ergebenden $4n$ Constanten kommen

aber wieder 4 im Mißfall wegen der zwischen den n Erzeugenden bestehenden Relation:

$$A\,B \ldots N = 1.$$

Ferner aber dürfen wir es als unwesentlich ansehen, ob wir die Gruppe eines Lösungssystems y_1, y_2 oder eines andern Systems zweier linear unabhängigen Lösungen $c_{11} y_1 + c_{12} y_2$, $c_{21} y_1 + c_{22} y_2$ betrachten. Geht man so von einem Lösungssystem zu einem andern über, so modificirt sich auch die Monodromiegruppe, sie wird „transformirt." Durch eine solche geeignete Transformation kann man noch mehreren Coefficienten der Gruppe beliebige Werte erteilen. Da die transformirende Substitution

$$y_1' = c_{11} y_1 + c_{12} y_2$$
$$y_2' = c_{21} y_1 + c_{22} y_2$$

vier Coefficienten enthält, so könnte man meinen, daß man dadurch 4 Coefficienten der Gruppe bestimmte Werte geben könnte. Wenn man aber bedenkt, daß die Lösungen

$$y_1' = c\,y_1 \qquad y_2' = c\,y_2$$

genau dieselbe Monodromiegruppe besitzen, wie y_1, y_2, daß es also nur auf das Verhältnis der 4 Coefficienten

c_{11} c_{12} c_{21} c_{22} vorkommt, so ist klar, dass die Zahl der Constanten nur um 3 zu erniedrigen ist, wenn wir in einander transformirbare Gruppen nicht als wesentlich verschieden ansehen. Es bleiben also im Ganzen noch $4n-7$ wesentliche Constanten der Gruppe übrig.

Die Monodromiegruppe der Differentialgleichung enthält $4n-7$ Constanten, indem von der Zahl $4n$ der Substitutionscoefficienten erstens 4 Einheiten abzuziehen sind, weil die Relation $AB..N=1$ besteht, und dann noch 3 Einheiten, weil wir statt der Ausgangszweige y, y' zwei beliebige andere Ausgangszweige hätten wählen können.

Die Constantenzahl der Monodromiegruppe ist also genau so groß, wie die Constantenzahl der Differentialgleichung selbst, vorausgesetzt, daß man in die Differentialgleichung keine Nebenpunkte einführt *).

Man kann nun den Zusammenhang zwischen den Constanten der Differentialgleichung und denjenigen

*) Dieser Satz gilt nur für die Differentialgleichungen 2ter Ordn., für Diffgl. höherer Ordn. ist die Constantenzahl der Gruppe immer größer als die der Gleichung, so daß in die Gleichung notwendig Nebenpunkte eingeführt werden müssen, falls die Gruppe allgemein sein soll, Vergl. Poincaré in Acta Math. IV p. 116 ff. (Sur les groupes des équations linéaires. – 1884).

der Gruppe von verschiedenen Richtungen her untersuchen.

Man kann sich z. B. die Differentialgleichung gegeben denken, und nach der zugehörigen Monodromiegruppe fragen. So geschieht es bei Fuchs und Anderen.**)

Ich sage:

Wenn wir versuchen, von der Differentialgleichung aus die Monodromiegruppe zu berechnen, so wissen wir von vornherein aus den Exponenten des einzelnen singulären Punktes, wie die kanonische Form der einzelnen erzeugenden Substitution heißt.

Denn wenn λ', λ'' die Exponenten etwa des Punktes a sind, so ist die Substitution, welche die beiden zu a gehörenden Fundamentallösungen bei Umkreisung von a erleiden: $y_1' = e^{2i\pi\lambda'} y_1$, $y_2' = e^{2i\pi\lambda''} y_2$ gerade die kanonische Form der Substitution A, welche irgend zwei linear unabhängige Zweige erleiden.

Wenn wir mehr wissen wollen, müssen wir die Zusammenhangsformeln entwickeln, welche die Hauptlösungen des Punktes a mit den Hauptlösungen des Punktes b, des Punktes c u. s. w. verbinden.

Wir wollen dies nicht weiter verfolgen, sondern jetzt vielmehr die umgekehrte, die Riemannsche Fragestellung, besprechen

**) vergl. den Bericht Poincaré in Acta Math. IV, p. 208 ff.

Riemann denkt sich die Substitutionsgruppe gegeben d. h. die erzeugenden Substitutionen $A, B, \ldots N$, welche das System zweier Functionen y_1, y_2 beim Umlauf der Variablen um einzelne Punkte erleidet. Da aber durch blosse Angabe der Substitutionen $A, B \ldots N$ die zugehörigen Exponenten nur erst bis auf ganze Zahlen bestimmt sind, so verschärft er die Definition noch durch Angabe der Exponenten selbst. Er kommt so zu einem Schema:

$$P \left| \begin{array}{cccc} a & b & \ldots & n \\ A & B & & N \\ \begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda'' \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \mu' \\ \mu'' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \tau' \\ \tau'' \end{pmatrix} \end{array} \; x \right| .$$

Man kann sich nun zunächst einmal nur die Gruppe mit den zugehörigen Exponenten gegeben denken, während die Verzweigungspunkte $a, b, \ldots n$ noch unbekannt bleiben mögen. Dann sind $4n-7$ Constanten vorgegeben, geradesoviel, wie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit n singulären Punkten ohne Nebenpunkte besitzt.

Indem wir die Gruppe voranstellen, bringt uns die Uebereinstimmung in der Constantenzahl dazu, die Möglichkeit im Auge zu fassen, daß zu jeder Gruppe nach der Wahl der Exponenten

eine discrete Zahl bestimmter Differentialgleichungen ohne Nebenpunkte oder mit vorgegebenen Nebenpunkten gehören mögen.

Bei diesem Ansatz ergibt sich aber noch keine Theorie der verwandten Functionen, weil die verschiedenen Differentialgleichungen, die zu derselben Gruppe gehören, allgemein zu reden, noch verschiedene Verzweigungspunkte haben werden, während gleichgruppige Functionen von x doch nur dann verwandt genannt werden können, wenn die gleichen Substitutionen bei den gleichen Umläufen des x eintreten, also auch die Verzweigungspunkte dieselben sind.

Um dieser Misslichkeit zu entgehen, denkt Riemann neben der Gruppe auch die Verzweigungspunkte der Differentialgleichung von vornherein als gegeben und denkt dann, um doch die erforderliche Constantenzahl in der Differentialgleichung zur Verfügung zu haben, in dieselbe $n-3$ bewegliche Nebenpunkte aufgenommen.

Indem Riemann in solcher Weise die Bedeutung des Symbols:

$$P\left|\begin{array}{cccc} a & b & \dots & n \\ A & B & & N \\ \left(\begin{smallmatrix}\lambda' \\ \lambda''\end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix}\mu' \\ \mu''\end{smallmatrix}\right) & & \left(\begin{smallmatrix}\nu' \\ \nu''\end{smallmatrix}\right) \end{array}\right| x$$

festlegt, nennt er alle diejenigen Functionen verwandt, welche in den $a, b, \cdots n$, sowie in den Substitutionen $A, B, \cdots N$ übereinstimmen.

Es handelt sich nun vor allen Dingen darum, daß solche Functionen, die dem gegebenen Symbol entsprechen, wirklich existiren. Durch die blosse Abzählung der Constanten ist der Beweis hierfür nicht erbracht. Denn die transcendenten Gleichungen, durch welche bei gegebener Differentialgleichung die Constanten der Gruppe bestimmt werden, brauchen durchaus nicht nach den Constanten der Differentialgleichung unbeschränkt auflösbar zu sein.

Das centrale Problem, welches nun zu erledigen ist, welches aber von Riemann nicht erledigt wurde, und überhaupt noch nicht behandelt worden ist, ist der Existenzbeweis, der Beweis, daß für beliebig gegebene $a, b, \cdots n$, $A, B, \cdots N$ wirklich zugehörige Functionen existiren, bezw. die Untersuchung, wie viele solche zugehörige Functionen existiren.

Die einzige Bemerkung, welche Riemann in dieser Hinsicht macht, ist folgende: er sagt: wenn wir für eine specielle Wahl der Exponenden eine P-Function haben, dann können wir durch Differentiation und Addition der so entstehenden ver-

verwandten Functionen die allgemeinste verwandte Function herstellen. Alles kommt also darauf an, für irgend ein Exponentensystem den Existenzbeweis zu führen.

Jetzt bin ich an der entsprechenden Stelle, wie am Schluss der vorigen Stunde, wo verlangt wurde, den Existenzbeweis für $n=3$ zu führen.

Bei der Führung dieses Existenzbeweises wird der Ansatz der Schilling'schen Dissertation weiter zu verfolgen sein.

Von Litteratur über die Riemann'sche Fragestellung kenne ich nur eine Abhandlung von Heun in Acta math. Bd. 11. 1887 *) und zwei Abhandlungen desselben Verfassers in Math. Ann. Bd. 33. 1889. **) Aber Heun geht da nicht sehr tief. Er beschränkt sich im Allgemeinen auf Constantenzählungen und behandelt dann den Fall $n=4$, geht aber dabei nicht von der Gruppe aus, sondern verlangt nur zu einer gegebenen Differentialgleichung eine verwandte Differentialgleichung.

In meinen Vorlesungen von 1890–91 ist das

*) Zur Theorie der mehrdeutigen, mehrfach linear verknüpften Functionen. **) Zur Theorie der Riemann'schen Functionen zweiter Ordnung mit 4 Verzweigungspunkten. — Beiträge zur Theorie der Lamé'schen Functionen.

Riemann'sche Problem direkt überhaupt nicht berührt weil überhaupt nicht von beweglichen Nebenpunkten bei den Differentialgleichungen die Rede ist. Die verschiedenen Fragestellungen, die in jenen Vorlesungen behandelt werden, haben vielmehr folgenden Charakter: Die n Verzweigungspunkte gelten als gegeben, und es wird nun die Monodromiegruppe nicht willkürlich vorgeschrieben, sondern nur mit $3n-4$ Willkürlichkeiten ausgestattet. Die Frage ist wieder nach der Existenz und nach der eindeutigen Bestimmtheit der Differentialgleichung.

Die von mir behandelten Probleme halten also sozusagen die Mitte zwischen den Entwickelungen, welche von der Differentialgleichung als gegeben ausgehen, nach dem Riemann'schen Ansatze.

Wir werden im weiteren Fortgange der Vorlesung versuchen müssen, allen diesen verschiedenen Fragestellungen neben einander gerecht zu werden.

Da ist denn der hypergeometrische Fall, wie wir ihn jetzt kennen, die gemeinsame Grundlage; denn für $n=3$ fallen die sämmtlichen Fragestellungen noch zusammen und werden durch die Theorie der Γ-Function vollständig erledigt.

Weihnachten.

Mon. d. 8. Jan. 94. Was wir vor Weihnachten besprochen haben, können wir als die historische Grundlegung der Theorie der Riemannschen P-Function bezeichnen. In dem neuen Capitel dagegen, welches wir jetzt in Angriff nehmen, werden wir ein neueres Moment zur Geltung zu bringen haben, indem wir nämlich den

Quotient zweier Particularlösungen

betrachten, und die conforme Abbildung studieren, welche ein solcher Quotient $\frac{y_1}{y_2}$, den wir kurz mit $\eta(x)$ bezeichnen, von der x-Ebene entwirft.

Es ist das ein Ansatz, der ebenfalls auf Riemann zurückgeht, wenn er auch nur in dessen nachgelassenen Arbeiten vorkommt, nämlich in den beiden auf Minimalflächen bezüglichen Abhandlungen

1.) Über die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung. (Aus den Jahren 1860-61, nach Riemann's Tode 1867 von Hattendorff in Bd. 13. der Abh. d. Gött. Ges. d. W. veröffentlicht, abgedruckt Ges. Werke No XVII.)

2.) Beispiele von Flächen kleinsten Inhalts bei gegebener Begrenzung. (Zuerst veröffentlicht von Weber in Ges. Werke No XXVI d. 1. Aufl. 1876, No XXVII der 2. Aufl. 1892.)

Es sind aus der ersten Abhandlung besonders die Stellen S. 316 ff und 322 ff der 2. Auflage,

welche für uns in Betracht kommen, an der ersten wird allgemein der Quotient zweier Particulärlösungen einer linearen Differentialgleichung überhaupt in die Betrachtung eingeführt, an der zweiten wird dieser Quotient so specialisirt, daß er 3 Verzweigungspunkte hat, wie im hypergeometrischen Fall, daneben freilich noch Nebenpunkte, wie sie in der letzten Stunde vor Weihnachten von uns besprochen worden sind.

Wenn also schon Riemann den Quotienten zweier Particularlösungen und die durch ihn vermittelte conforme Abbildung betrachtet, so ist doch dieser Ansatz in den Vordergrund gezogen und ordentlich herausgearbeitet worden erst von H. A. Schwarz in Crelle's Journ. Bd. 75 in der grundlegenden Abhandlung: „Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaußische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt." 1872, erschienen 1873. Schwarz bezeichnet daselbst den in Frage stehenden Quotienten mit s, während wir ihn in Übereinstimmung mit Riemann mit η bezeichnen.

Wir wollen zuerst allgemein die analytische Natur der Function

$$\frac{y_1}{y_2} = \eta(z),$$

insbesondere ihr Verhalten gegenüber geschlossenen

Umläufen der Variablen x untersuchen.
Bei einem solchen geschlossenen Umlauf verwandelt sich y_1 in $\alpha y_1 + \beta y_2$; y_2 in $\gamma y_1 + \delta y_2$, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ geeignete Constanten verstanden, der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ daher in $\frac{\alpha y_1 + \beta y_2}{\gamma y_1 + \delta y_2} = \frac{\alpha \frac{y_1}{y_2} + \beta}{\gamma \frac{y_1}{y_2} + \delta}$; d. h.

Unsere η-Function hat die Eigenschaft, bei geschlossenen Umläufen des x projective Transformationen*) mit constanten Coefficienten zu erleiden.

$$\eta^{(1)} = \frac{\alpha \eta + \beta}{\gamma \eta + \delta}$$

Eine solche Transformation hat 3 Constanten. Stellt man daher neben η die 3 ersten Ableitungen nach x, nämlich η', η'', η''', so muß man aus diesen 4 Functionen durch Elimination der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ einen Ausdruck $\Phi(\eta\, \eta' \eta'' \eta''')$ herleiten können, der bei beliebigen projectiven Transformationen von η, also auch bei beliebigen Umläufen von x ungeändert bleibt, der also eine eindeutige Function $R(x)$ von x ist.

*) Sollen wir mit Lie eine gebrochene lineare Substitution einer Variablen nennen, indem wir die Benennung „lineare Substitution" für die ganzen homogenen linearen Substitutionen zweier Variablen reserviren.

Also:

η genügt notwendigerweise einer Differentialgleichung 3. Ordnung von der Form

$$\Phi(\eta\ \eta'\ \eta''\ \eta''') = R(x),$$

wobei die linken Seite die Eigenschaft hat, unge= ändert zu bleiben, wenn ich $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ für η setze und wo andererseits die rechte Seite eine eindeutige Func= tion von x darstellt.

Nun kommt es darauf an einerseits die Gestalt der linken Seite zu finden, andererseits die eindeutige Function auf der rechten Seite auszurechnen.

Das erste Ziel erreichen wir am bequemsten mit Benutzung folgender Überlegungen:

Die allgemeinste projective Transformation setzt sich aus Transformationen der speciellen Gestalt

$$\eta^{(1)} = \eta + \text{const}, \quad \eta^{(1)} = \eta \cdot \text{const}, \quad \eta^{(1)} = \frac{1}{\eta}$$

zusammen

Der erste Differentialquotient η' bleibt bei der ersten dieser Operationen ungeändert, ebenso alle höheren Differentialquotienten $\eta'', \eta''', \ldots$ Dieselben sind also sämtlich „Differentialinvarianten" für die Transformationen der ersten Art, desgleichen jede rationale Verbindung der $\eta'\ \eta''\ \eta''' \ldots$ Bei Anwen= dung einer Operation $\eta^{(1)} = k \cdot \eta$ aber multipliciren sich die $\eta'\ \eta''\ \eta''', \ldots$ sämtlich mit k; invariant

bleiben daher die Quotienten irgend zweier Ableitungen, z. B. $\frac{\eta''}{\eta'}$ und $\frac{\eta'''}{\eta'}$ und natürlich auch die Ableitungen irgend eines solchen Quotienten, z. B. $\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx}$. Aber bei Anwendung der Transformation $\eta^{(1)} = \frac{1}{\eta}$ bleiben auch diese Ausdrücke, die bei den Transformationen der beiden ersten Arten ungeändert bleiben, nicht invariant; es verwandelt sich vielmehr

$$\frac{\eta''}{\eta'} \text{ in } \frac{\eta''}{\eta'} - 2\frac{\eta'}{\eta},$$

$$\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} \text{ in } \frac{d\,\frac{\eta''}{\eta'}}{dx} - 2\frac{\eta''}{\eta} + 2\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2.$$

Andrerseits verwandelt sich

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 \text{ in } -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 + 2\frac{\eta''}{\eta} - 2\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2,$$

woraus sich durch Addition mit der letzten vorhergehenden Formel ergibt, daß der Ausdruck

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$$

auch bei der Transformation $\eta^{(1)} = \frac{1}{\eta}$, und also bei allen projectiven Transformationen ungeändert bleibt. Wir schreiben nun die Differentiation aus und setzen für den ganzen Ausdruck, der unserm ganzen weiteren Betrachtungen zu Grunde liegen wird,

ein abkürzendes Zeichen ein:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = \frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = [\eta].$$

<u>Mit diesem Ausdruck haben wir die einfachste Differentialinvariante der projectiven Transformationsgruppe erhalten.</u>

Ein so wichtiger Differentialausdruck findet sich natürlich bereits in der älteren Litteratur; doch ihn ausdrücklich betont und seine Bedeutung in ihrer ganzen Tragweite hervorgekehrt hat erst Schwarz. daher haben sich nach dem Vorgange von Cayley und Sylvester Benennungen wie „Schwarz' Differentialinvariante", „Schwarz' Differentialparameter", „Schwarzian derivative" u.s.w. vielfach eingebürgert.

Was die Frage der Differentialinvarianten überhaupt betrifft, so verweise ich auf meine Vorlesung über Höhere Geometrie II S. 257 ff, wo zugleich ein Vergleich der Lie'schen und der Sylvester'schen Auffassung angestellt wird.

Jetzt soll auch die Function $R(x)$ auf der rechten Seite der Differentialgleichung für y berechnet werden, indem wir von der für y_1 und y_2 geltenden Differentialgleichung

$$y'' + py' + qy = 0$$

ausgehen.

Vergleichen wir unser Vorhaben, aus dieser linearen Differentialgleichung mit den particulären Lösungen y_1 y_2 eine Differentialgleichung zu berechnen, welcher der Quotient $\frac{y_1}{y_2}$ der beiden Lösungen genügt, mit der Theorie der algebraischen Gleichungen wo man die Auflösung einer algebraischen Gleichung auf die Auflösung einer andern algebraischen Gleichung zurückführt, welcher eine Verbindung der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung genügt, und welche man eine Resolvente der ursprünglichen Gleichung nennt, so werden wir folgende Ausdrucksweise gerechtfertigt finden:

<u>Ich bezeichne die Gleichung</u>

$$[y] = R(t)$$

<u>für $y = \frac{y_1}{y_2}$ als Differentialresolvente der vorgelegten Gleichung zweiter Ordnung</u>

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Es ist nun die Resolvente wirklich zu berechnen. Aus

$$y_1'' + py_1' + qy_1 = 0$$
$$y_2'' + py_2' + qy_2 = 0$$

folgt durch Elimination von q:

$$p = -\frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1}.$$

Ferner ist

$$\eta = \frac{y_1}{y_2}, \quad \eta' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2}, \quad \frac{\eta''}{\eta'} = \frac{d \log \eta'}{dx} = \frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1} - 2\frac{y_2'}{y_2}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\eta''}{\eta'} = -p - 2\frac{y_2'}{y_2};$$

daraus

$$\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} = -\frac{dp}{dx} - 2\frac{y_2''}{y_2} + 2\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^2,$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -\frac{1}{2}p^2 - 2p\frac{y_2'}{y_2} - 2\left(\frac{y_2'}{y_2}\right)^2,$$

$$[\eta] = \frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -\frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx} - 2 \cdot \frac{y_2'' + p y_2'}{y_2}.$$

Nun ist wegen der für y_2 bestehenden linearen Diff. Gl.

$$y_2'' + p y_2' = -q y_2,$$

so daß sich also schließlich ergibt:

<u>Die Differentialresolvente 3. Ordn. der gegebenen linearen Differentialgleichung 2. Ordn. heißt</u>

$$[\eta] = 2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dx},$$

<u>und hier steht rechter Hand ein rationaler Ausdruck, wenn wir p und q als rationale Functionen voraussetzen.</u>

Di. d. 9. Jan. 93.

Gehen wir insbesondere von unserer Differentialgleichung mit n singulären Punkten und regulärem Verhalten in allen Punkten aus

$$y'' + y'\left\{\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \cdots + \frac{1-\tau'-\tau''}{x-n}\right\} + \frac{y}{(x-a)\cdots(x-n)}\left\{\frac{\lambda'\lambda''(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + \frac{\tau'\tau''(n-a)\cdots(n-m)}{x-n} + g_{n-4}(x)\right\}$$

so kommen wir zu einer Differentialresolvente der Gestalt

$$[\eta] = \frac{1}{(x-a)\cdots(x-n)}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2}\,\frac{(a-b)\cdots(a-n)}{x-a} + \cdots + \frac{1-\tau^2}{2}\cdot\frac{(n-a)\cdots(n-m)}{x-n} + 2\,g_{n-4}(x)\right\},$$

wo unter g_{n-4} eine mit g_{n-4} gesetzmäßig zusammenhängende ganze Function $(n-4)$ten Grades verstanden ist.

Im Specialfall der hypergeometrischen Function mit den singulären Punkten a, b, c lautet die Gleichung:

$$[\eta] = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2}\,\frac{(a-b)(a-c)}{x-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\,\frac{(b-a)(b-c)}{x-b} + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)}{x-c}\right\}.$$

Läßt man insbesondere b nach ∞ rücken, so wird $\lim \frac{a-b}{x-b} = 1$, $\lim \frac{(b-a)(b-c)}{(x-b)\cdot(x-b)} = 1$, $\lim \frac{c-b}{x-b} = 1$, also

$$[\eta] = \frac{1}{(x-a)(x-c)}\left\{\frac{1-\lambda^2}{2}\cdot\frac{a-c}{x-a} + \frac{1-\mu^2}{2} + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{c-a}{x-c}\right\},$$

und wenn wir endlich $a=0$, $c=1$ setzen, so resultirt:

$$[\eta] = \frac{1}{x(x-1)}\left\{-\frac{1-\lambda^2}{2x} + \frac{1-\mu^2}{2} + \frac{1-\nu^2}{2(x-1)}\right\},$$

welche Gleichung wir auch leicht in die Form umsetzen können, in der sie sich bei Schwarz findet:

$$[\eta] = \frac{1-\lambda^2}{2x^2} + \frac{1-\nu^2}{2(x-1)^2} + \frac{\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1}{2x(x-1)}.$$

Nunmehr überlegen wir, was wir über die allgemeine Natur der Lösung einer solchen Differentialgleichung, insbesondere über die durch sie vermittelte conforme Abbildung aussagen können.

1.) Es sei $\eta_0(x)$ irgend eine erste Lösung der Differentialgleichung; dann lautet die allgemeine Lösung $\frac{\alpha\eta_0+\beta}{\gamma\eta_0+\delta}$, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ irgend welche beliebige Constanten, die Integrationsconstanten, verstanden.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung 3. Ordn. ergibt sich aus einer beliebigen particulären Lösung durch allgemeine projective Transformation.

2.) Wenn wir solche projective Transformationen der η-Variablen geometrisch untersuchen wollen, so ist es immer besser, η nicht in der Ebene, sondern nach Riemann auf einer Kugel zu deuten.

Der Vorzug der Deutung auf der Kugel ist insbesondere der, daß $\eta=\infty$ keine andere Deutung findet, als jeder andere Wert von η auch, wie das der principiellen Benutzung projectiver Transformationen entspricht.

Diese Zweckmäßigkeit der Kugel als Substrat für die geometrische Deutung der Function η hat Schwarz bestimmt, den Buchstaben s (= sphärische Function, wie $\wp$ = periodische Function) zu wählen.

3.) Um die durch $\eta(x)$ gegebene conforme Abbildung zu studiren, werden wir zuerst den Charakter derselben an einzelnen Punkten in der Weise untersuchen, daß wir für jeden Punkt einen passenden speciellen Zweig η aussuchen und die durch diesen bewirkte conforme Abbildung betrachten, um dann durch eine projective Transformation zu der allgemeinen Abbildung aufzusteigen.

a.) Wir fassen zuerst eine gewöhnliche Stelle x_0 ins Auge. Dort besitzt die ursprüngliche lineare Differentialgleichung zwei particuläre Integrale von der Gestalt:

$$y_1 = (x-x_0)^1 \cdot \mathfrak{P}_1(x-x_0)$$
$$y_2 = \qquad \mathfrak{P}_2(x-x_0),$$

so daß also die Resolvente ein particuläres Integral $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ von der Form

$$\eta = (x-x_0)^1 \cdot \mathfrak{P}(x-x_0) = C(x-x_0) + \dots$$

besitzt. Man sieht also:

<u>Die Abbildung in der Umgebung der gewöhnlichen Stelle $x = x_0$ ist bei gehöriger Auswahl der Particularlösung η in erster Annäherung durch $C(x-x_0)$ gegeben.</u>

b.) Es sei a eine singuläre Stelle mit den

Exponenten λ' und λ''. Es existiren dann zwei Particularlösungen

$$y_1 = (x-a)^{\lambda'} f_1(x-a),$$
$$y_2 = (x-a)^{\lambda''} f_2(x-a);$$

und also eine Particularlösung der Resolvente:

$$\eta = (x-a)^{\lambda} f(x-a) = C(x-a)^{\lambda} + \ldots$$

In der Umgebung der singulären Stelle $x=a$ bildet also eine zweckmäßig herausgesuchte Particularlösung η in erster Annäherung ab wie $C(x-a)^{\lambda}$.

c) An einem Ausnahmepunkt erster Ordnung a seien die beiden Exponenten, der kleinere λ', der größere λ'', die Differenz $\lambda = \lambda' - \lambda''$ also eine negative ganze Zahl oder 0. Es gibt zwei Particularlösungen der linearen Diff. Gl:

$$y_1 = (x-a)^{\lambda'} f_1(x-a) + (x-a)^{\lambda''} f_2(x-a) \log.(x-a),$$
$$y_2 = (x-a)^{\lambda''} f_2(x-a)$$

und eine Lösung

$$\eta = (x-a)^{\lambda} f(x-a) + \log(x-a).$$

In der Umgebung eines Ausnahmepunktes 1. Ordn. ist eine geeignete Particularlösung durch eine Reihenentwicklung folgender Form gegeben:

$$\eta = (x-a)^{\lambda} f(x-a) + \log.(x-a),$$

wo λ Null oder eine negative ganze Zahl ist.

d.) In einem Ausnahmepunkt 2. Ordnung ρ sei

$\lambda' > \lambda''$.

Aus den beiden partikulären Lösungen

$$y_1 = (x-\varrho)^{\lambda'} \varphi_1(x-\varrho)$$
$$y_2 = (x-\varrho)^{\lambda''} \varphi_2(x-\varrho)$$

folgt $\eta = (x-\varrho)^{\lambda} \varphi(x-\varrho)$ mit positivem ganzzahligen λ.

Bei einem Ausnahmepunkt zweiter Ordnung fällt das logarithmische Glied wieder fort.

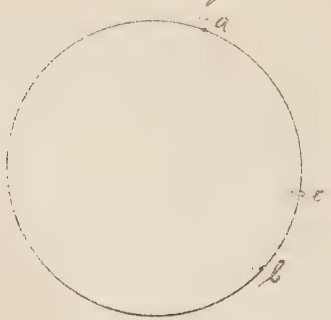
Hat man einen einfachen Nebenpunkt, so ist daselbst $\lambda' = 2$, $\lambda'' = 0$, also $\lambda = 2$.

Insbesondere wenn ein einfacher Nebenpunkt vorliegt, haben wir für eine zweckmäßig herausgemachte Partikularlösung in erster Annäherung

$$\eta = C(x-\varrho)^2. \; —$$

Was können wir nun nach diesen Sätzen über den Charakter der Abbildung in einzelnen Punkten über den Gesammtverlauf der Abbildung aussagen?

Wir bemerken zunächst:

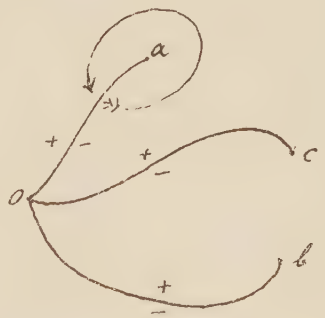


Um die Gesammtabbildung welche η von der x-Ebene entwirft, zu studiren werden wir die x-Ebene mit einem Querschnittsystem versehen welches durch alle

singulären Punkte hindurchgeht. Beispielsweise können wir die x-Ebene im Falle des C-Funktion durch einen Kreis, welcher durch die 3 singulären Punkte hindurchgeht, in zwei Kreisscheiben (Halbebenen) zerlegen und die Abbildung der einzelnen Kreisscheibe (Halbebene) untersuchen.

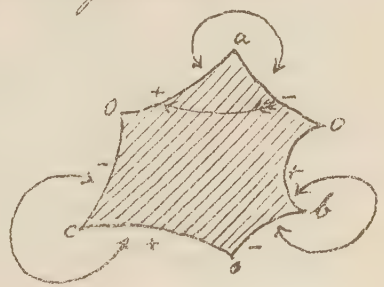
Dies ist aber doch nur eine specielle Maßnahme; allgemeiner und im Allgemeinen zweckmäßiger ist folgende Zerschneidung:

Man lege von irgend einem beliebigen Punkte der x-Ebene nach jedem der n singulären Punkte je einen Einschnitt Oa, Ob, Oc.



Die Abbildung dieser geschnittenen x-Ebene auf der η-Kugel bildet ein 6-Seit, dessen aufeinander folgende Kanten paarweise zusammengehören, wie es in der Figur angedeutet ist.

Über die Art, wie die einzelnen Punkte der zusammengehörigen Kanten mit einander verbunden sind, können wir gleich



noch genaueres aussagen.

Wenn wir in der x-Ebene von dem negativen Ufer etwa des Schnittes Oa zu demselben Punkt auf dem positiven Ufer gelangen wollen, so müssen wir einen positiven Umlauf um den Punkt a ausführen. Dabei erleidet aber η eine ganz bestimmte projective Transformation $A(\eta)$.

Entsprechend hat man längs Ob eine Transformation $B(\eta)$, längs Oc. $C(\eta)$.

Die Werte von η auf dem einen Ufer jedes der Schnitte gehen also aus dem Wert von η auf dem andern Ufer je durch eine projektive Transformation hervor, d.h. in der η Ebene sind je zwei zusammengehörige Punkte des Randes durch eine bestimmte projective Transformation verbunden.

Des Näheren wird die Zusammengehörigkeit von jedesmal zwei Kanten unseres Sechseits durch projektive Transformationen A bezw. B und C in der in der Figur angedeuteten Weise gegeben.

Auf der η-Kugel erhalten wir als Abbildung der eingeschnittenen x-Ebene ein Sechseit, dessen Kanten paarweise projektiv zusammengeordnet sind.

In diesem projektiven Charakter der Zusammenordnung drückt sich offenbar das innere Wesen der η-Function aus.

Do. d. 11 Jan. 94.

Wir wollen heute auf das Verhältnis der Differentialresolvente 3. Ordn. zu der ursprünglichen linearen Differentialgleichung 2. Ordn. etwas näher eingehen.

Zunächst sehen wir durch Abzählung der Constanten, daß die Resolvente weniger Constanten enthält als die lineare Differentialgleichung, daß sie also thatsächlich eine Vereinfachung gegenüber derselben vorstellt.

Die lineare Differentialgleichung hat, wie wir früher gesehen, $4n-7$, wenn wir noch k Nebenpunkte zulassen, $4n-7+k$ wesentliche Constanten. Desgleichen hat die zugehörige Gruppe linearer Substitutionen $4n-7$ wesentliche Constanten.

Die Constanten der Differentialresolvente sind dagegen die folgenden:

$n-3$ unabhängige Doppelverhältnisse der Punkte $a, b, \ldots n$,

n Exponentendifferenzen $\lambda, \mu \ldots \tau$, welche voneinander unabhängig sind,

<u>$n-3$ accessorische</u> Parameter (Coefficienten von $G_{n-4}(x)$)

Sa $3n-6$ wesentliche Constanten. Bei Adjunction von k Nebenpunkten erhöht sich die Zahl auf $3n-6+k$.

Die Gruppe der projektiven Transformationen, welche die Lösung η bei geschlossenen Umläufen des x erleidet, hat n Erzeugende mit je 3 Constanten

(da es nur auf das Verhältnis $x : y : z$ [illegible]
Da aber diese Erzeugenden A, B, C [illegible]

$$A\,B\,C \ldots N = 1$$

genügen, so enthalten sie im Ganzen [illegible] unabhängige Constanten. Von diesen [illegible] 3 als unwesentlich abziehen, da man durch [illegible] Bestimmung der in η noch willkürlichen [illegible] constanten noch dreien der Constanten der Gruppe beliebige Werte erteilen kann.

Während also die lineare Differentialgleichung 2ter Ordn. mit k Nebenpunkten $4n-7+k$ und die zugehörige Gruppe $4n-7$ wesentliche Constanten besitzt, hat die Differentialresolvente 3. Ordn. [illegible] $3n-6+k$ und die zugehörige Gruppe projectiver Transformationen $3n-6$ wesentliche Constanten.

Daß in dieser Beziehung die Resolvente einen einfacheren Charakter besitzt, darf uns aber nicht etwa zu verleiten, in Zukunft unsere Betrachtungen auf die Differentialgleichung 3. Ordn. zu beschränken, denn:

Die lineare Differentialgleichung 2. Ordn. hat vor der Differentialgleichung 3. Ordnung eine Reihe feiner Eigenschaften voraus, wie z.B. der ganze Lehrsatz der verwandten Transformationen, auch nur [illegible]

kommuner Weise auf die Differentialgleichung 3. Ordnung übertragen läßt.

Wenn wir von der Differentialgleichung 3. Ordn. für η zu der linearen Differentialgleichung 2. Ordn. für y_1, y_2 übergehen, so spalten wir damit gewissermaßen die Variable η in zwei homogene Variable y_1 und y_2. Wie wir hiermit wirklich einen Fortschritt in der Theorie machen, so wird es noch ein weiterer Fortschritt sein, wenn wir consequenterweise auch die Variable x in zwei homogene Variable $x_1 : x_2$ spalten, wenn wir statt der Functionen von x, „Formen" von x_1, x_2 betrachten. Also:

So gut es vortheilhaft ist, η in $y_1 : y_2$ zu spalten, so ist es für noch eingehendere Betrachtungen nützlich, auch für x homogene Variablen einzuführen, d.h. $x = \frac{x_1}{x_2}$ zu setzen.

Der zweckmäßige systematische Gang scheint zu sein, daß wir mit dem $\eta(x)$, d.h. mit der Differentialgleichung 3. Ordn. beginnen, daß wir dann $\frac{y_1}{y_2}$ für η einführen, d.h. zur linearen Differentialgleichung 2. Ordn. aufsteigen und endlich, daß wir auch x in $x_1 : x_2$ spalten, und nicht mehr Functionen von x, sondern Formen von x_1, x_2 untersuchen.

Ich will nun noch die Formeln angeben, durch

welche man von der Differentialgleichung 3. Ordn. zur linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, d.h. von η zu y_1, y_2 zurückgelangt.

Es folgt nämlich aus
$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0$$
$$y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0$$
die Formel
$$p = -\frac{y_1'' y_2 - y_2'' y_1}{y_1' y_2 - y_2' y_1},$$
und hieraus durch Integration
$$-\int p\,dx = \log(y_1' y_2 - y_2' y_1)$$
oder
$$y_1' y_2 - y_2' y_1 = e^{-\int p\,dx},$$
die sogenannte „Abel'sche" Satz.

Andererseits ist, wenn $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ ist
$$\eta' = \frac{y_1' y_2 - y_2' y_1}{y_2^2} = \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_2^2},$$
und also
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta'}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} \qquad y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx}.$$

Diese Formeln wollen wir noch für die Differentialgleichung mit n singulären Punkten $a, b, \ldots n$ und den Exponenten $\lambda', \lambda''; \mu', \mu'', \ldots \tau', \tau''$ specialisiren. Für diese ist zu setzen
$$p = \frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a} + \frac{1-\mu'-\mu''}{x-b} + \ldots + \frac{1-\tau'-\tau''}{x-n},$$
$$e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx} = (x-a)^{\frac{\lambda'+\lambda''-1}{2}} (x-b)^{\frac{\mu'+\mu''-1}{2}} \ldots (x-n)^{\frac{\tau'+\tau''-1}{2}},$$
also
$$y_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}} (x-a)^{\frac{\lambda'+\lambda''-1}{2}} (x-b)^{\frac{\mu'+\mu''-1}{2}} \ldots (x-n)^{\frac{\tau'+\tau''-1}{2}}$$
$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{\eta'}} (x-a)^{\frac{\lambda'+\lambda''-1}{2}} (x-b)^{\frac{\mu'+\mu''-1}{2}} \ldots (x-n)^{\frac{\tau'+\tau''-1}{2}}.$$

Um eine vollständige Übersicht über die hierher gehörige Litteratur zu bekommen, müssen wir auch noch eine gewisse Differentialresolvente 1. Ordnung unserer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ins Auge fassen.

Es sei Y eine mit y verwandte Function, d. h. eine solche, deren passend ausgewählte Zweige bei jedem Umlauf von x dieselbe lineare Substitution erleiden wie die entsprechenden Zweige von y. Y_1 und y_1 seien irgend zwei entsprechende Zweige der einen und der andern Function.

Wir bilden nun, statt daß wir früher den Quotienten aus zwei Zweigen ein und derselben Function in Betracht zogen, den Quotienten zweier entsprechenden Zweige verschiedener verwandten Functionen, also

$$\omega = \frac{Y_1}{y_1}.$$

Ein Quotient dieser Art ist uns schon von Gauß' Kettenbruch her bekannt.

Ein specieller Fall ist es, wenn wir $Y_1 = y_1'$ setzen, denn y_1' ist ja eine mit y verwandte Function. Übrigens läßt sich das allgemeine $\omega = \frac{Y_1}{y_1}$ leicht auf diese specielle Function $\omega = \frac{y_1'}{y_1}$ zurückführen; Y_1 muß sich nämlich durch die

zwei mit ihm verwandten Functionen y_1 und y_1' linear mit rationalen Coefficienten zusammensetzen:

$$Y_1 = m(x)\, y_1 + n(x)\, y_1'$$

Nun ist aber $\frac{Y_1'}{Y_1} = m(x) + n(x) \cdot \frac{y_1'}{y_1}$.

Es kommt also ziemlich auf dasselbe hinaus, ob ich den allgemeinen Quotienten $\frac{Y_1'}{Y_1}$ in Betracht ziehe, oder den speciellen Quotienten $\frac{y_1'}{y_1}$.

Lasse ich nun x irgend welche Umläufe machen, so werden y_1 und Y_1 beide dieselbe lineare Substitution erfahren, der Quotient wird sich in einen Ausdruck der allgemeinen Gestalt $\frac{c_1 Y_1 + c_2 Y_2}{c_1 y_1 + c_2 y_2}$ verwandeln.

Der allgemeinste Wert, den w annimmt, ist in der Gestalt

$$(w) = \frac{c_1 Y_1 + c_2 Y_2}{c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

enthalten.

Ein solcher Ausdruck enthält aber nur eine einzige willkürliche Constante; daher wird er einer Differentialgleichung erster Ordnung genügen müssen. Diese ist leicht auszurechnen:

Aus $w = \frac{Y_1}{y_1}$ folgt $\frac{dw}{dx} = \frac{1}{y_1} \cdot \frac{dY_1}{dx} - \frac{Y_1}{y_1^2} \cdot \frac{dy_1}{dx}$.

Nun sind $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx}$ selbst mit y_1 und y_1 verwandt, müssen also sich in der Gestalt ausdrücken

$$\frac{dy_1}{dx} = v(x)\cdot y_1 + s(x)\cdot y_1 , \quad \frac{dy'}{dx} = t(x)\cdot y_1 + u(x)\cdot y_1$$

Setzt man dies im Ausdruck für $\frac{dw}{dx}$ ein, so ergibt sich

$$\frac{dw}{dx} = s(x) + (v(x) - u(x))\,w - t(x)\cdot w^2 .$$

Unsere Differentialresolvente 1. Ordnung hat die allgemeine Gestalt

$$\frac{dw}{dx} = s + (v-u)\,w - t\,w^2 ,$$

unter v, s, t, u rationale Functionen verstanden.

Verstehen wir unter w speciell den Quotienten $\frac{y_1'}{y_1}$, so bekommen wir

$$\frac{dw}{dx} = \frac{y_1''}{y_1} - \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 = -p\,\frac{y_1'}{y_1} - q - \left(\frac{y_1'}{y_1}\right)^2 .$$

D. h. Die specielle Gestalt unserer Resolvente heisst

$$\frac{dw}{dx} = -q - p\,w - w^2 .$$

Diese specielle, wie die allgemeine Differentialgleichung für w haben die Form

$$\frac{dw}{dx} = A(x) + B(x)\cdot w + C(x)\cdot w^2$$

mit rationalen A, B, C. Eine solche Differentialgleichung nennt man jetzt eine „Riccati'sche Differentialgleichung," [obwohl Riccati selbst nur eine specielle Gleichung dieser Art betrachtet hat, welche denn auch von Alters her den Namen von Riccati trägt. Wir werden morgen auf

diese specielle Riccati'sche Gleichung zurückkommen].
Unsere Differentialresolvente 1. Ordnung hat die Gestalt einer allgemeinen Riccati'schen Gleichung, und umgekehrt kann jede Riccati'sche Gleichung als Differentialresolvente 1. Ordnung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung angesehen werden.

Wir mußten auf diese Differentialresolvente ersten Ordnung deswegen eingehen, weil bei Lie die Riccati'sche Gleichung an die Spitze gestellt wird. Morgen wollen wir diese Lie'sche Behandlung und überhaupt Lie's Betrachtungsweise mit der unseren etwas eingehender vergleichen.

Ende d. R. Jan. 94. Um nun heute auf den Unterschied der in dieser Vorlesung festzuhaltenden Betrachtungsweise und derjenigen von Lie *) näher einzugehen, so haben wir:

1.) einen allgemeinen Punkt hervorzuheben, der einen innern Unterschied in der Sache selbst begründet. Nämlich:

Ein innerer Unterschied ist, daß Lie die vorkommenden Functionen A, B, C, z. B. nicht näher specificirt, sondern nur allgemein als bekannt ansieht, während wir genau sagen, ob es algebraische

*) Man vergleiche hierzu die Entwicklungen in dem Buche: Lie-Scheffers, Continuirliche Gruppen.

Functionen sein sollen, ob sie rationale Functionen sein sollen, wo sie unendlich werden sollen, wie sie unendlich werden sollen u. s. w.

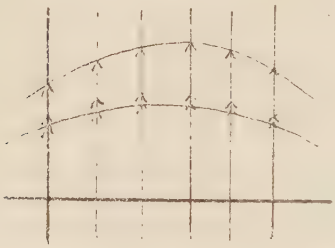
Man könnte dies unterscheidende Merkmal also etwa so formuliren:

Explicite Festlegung der Functionen und allgemeine Annahme der Functionen.

2.) Ein zweiter Punkt betrifft mehr die äußere Darstellung, als das innere Wesen der Sache; es handelt sich nämlich um die Art der geometrischen Interpretation. Während wir eine functionelle Abhängigkeit $\eta(x)$ als conforme Abbildung einer x-Ebene auf eine η-Ebene deuten, wobei uns auch die Verhältnisse im complexen Gebiet zur Anschauung kommen, deutet Lie die beiden Variablen in derselben Ebene als Coordinaten eines Punktes, so daß eine Function $\eta(x)$ durch eine Curve in der Ebene repräsentirt ist. Dabei kommen unmittelbar genommen nur die reellen Werte von x und η zur Geltung, und jedenfalls wird die Ausdrucksweise immer so gewählt, als ob x und η reell wären

3.) Fürtens wollen wir geradezu die Lie'sche Interpretation von $\eta(x)$ der unsrigen gegenüberstellen:

Wir sagten $\eta(x)$ bilde die zerschnittene x-Ebene auf einen gewissen Bereich der η-Ebene ab, und wenn wir von η zu einem andern Integral $\frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ übergingen, so heisse das, wir unterwerfen den Bereich in der η-Ebene einer „projektiven" Transformation. Bei Lie bedeutet $\eta(x)$ einen Curvenzug in einer Ebene, und der Übergang von einem Integral zu einem andern kommt auf eine Transformation dieser Curve durch die Formeln $(x, \eta) = \left(x, \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}\right)$ hinaus.



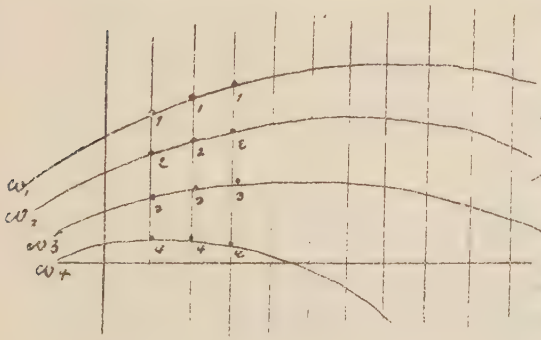
Bei dieser Transformation verschiebt sich jeder Punkt der Curve auf seiner Ordinate um einen Betrag, der nur von dem Werte der Ordinate des betreffenden Curvenpunktes η abhängt. Es ist das jedoch keine „projektive Transformation der Ebene", da die transformirten x, η keineswegs denselben Nenner haben. Es gehen also nicht alle Geraden der Ebene wieder in Gerade über, sondern nur die senkrechten und wagrechten Geraden, erstere immer in sich selbst, von letzteren bei jeder Transformation zwei in sich selbst. – Ferner noch folgender Unterschied in der Ausdrucksweise:

Unsere Transformationen der η-Bereiche auf der Kugel besitzen 3 complexe, also 6 reelle Parameter, wir haben es also mit ∞^6 Transformationen zu thun. Lie dagegen hat gemäß der Beschränkung auf reelle Größen nur 3 reelle Parameter, die Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma:\delta$; die Schar der Lie'schen Transformationen der Ebene hat also nur die Mannigfaltigkeit ∞^3.

4. Ferner wollen wir in gleicher Weise die Function $w(x)$ der Riccati'schen Differentialgleichung deuten.

Die allgemeine Lösung der Riccati'schen Differentialgleichung hat die Gestalt $\frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 y_1 + c_2 y_2}$, also einen complexen Parameter.

Dem entsprechen ∞^2 verschiedene conforme Abbildungen der x Ebene. In der Lie'schen Deutung dagegen erhalten wir eine ∞^1 Schaar von Curven in der (x, w) Ebene. Über diese Curven kann man einen gewissen Satz aufstellen; wir behaupten nämlich



<u>Die verschiedenen Ordinaten werden von 4 beliebigen herausgegriffenen Riccati'schen Curven jedesmal nach demselben Doppelverhältnis geschnitten.</u>

oder, was dasselbe ist, die Ordinaten werden durch die ganze Schar der Riccatischen Curven projectiv aufeinander bezogen.

Sei etwa $\omega_1 = \frac{y_1}{y_1}$, $\omega_2 = \frac{y_2}{y_2}$, $\omega_3 = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 y_1 + c_2 y_2}$, $\omega_4 = \frac{c_1' y_1 + c_2' y_2}{c_1' y_1 + c_2' y_2}$,

und bilden wir das Doppelverhältniß

$$\frac{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_4 - \omega_2)}{(\omega_3 - \omega_2)(\omega_4 - \omega_1)},$$

so finden wir für dasselbe den Wert $\frac{c_1 c_2'}{c_2 c_1'}$, also in der That einen Ausdruck, der nur von der Auswahl der 4 Curven abhängt, von x aber unabhängig ist und also beim Übergang von einer Ordinate zu einer andern, d.h. bei Änderung des x, sich nicht ändert.

Vermöge dieses Satzes kann man aus drei gegebenen Riccatischen Curven jede vierte Riccatische Curve eindeutig construiren.

Für die Deutung durch conforme Abbildung heißt das, daß man aus irgend 3 Riccatischen Abbildungen jede vierte eindeutig construiren kann.

Für diejenigen, welche mit der Lie'schen Transformationstheorie vertraut sind, bemerke ich noch:

Der Satz von der projectiven Zuordnung der

Ordinaten durch die Riccatische Curvenschar kommt bei Lie von selbst heraus, indem er die rechte Seite der Gleichung

$$dw = (A + Bw + Cw^2)\,dx$$

als Symbol einer infinitesimalen projectiven Transformation ansieht, welche w erleidet, wenn x um dx wächst.

5.) Endlich will ich noch den Zusammenhang zwischen den beiden Resolventen, derjenigen 3. Ordnung und derjenigen 1. Ordnung, angeben. Dieselbe ist sehr einfach: Sei

$$y = \frac{1}{\sqrt{\eta'}}\, e^{-\frac{1}{2}\int p\,dx},$$

folglich $\log y = -\frac{1}{2}\int p\,dx - \frac{1}{2}\log \eta'$,

so wird $w = \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}\log y = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\frac{\eta''}{\eta'}$. Also

Der direcke Übergang von η zu w wird durch die Formel

$$w = -\frac{p}{2} - \frac{\eta''}{2\eta'}$$

geliefert.

Umgekehrt wird

$$\frac{\eta''}{\eta'} = \frac{d}{dx}\log \eta' = -(p + 2w),$$

und also

$$\eta = \int e^{-\int^x (p+2w)\,dx}\,dx.$$

Beim Übergang von η zu der linearen Differentialgleichung für y kann man noch p beliebig vorgehen,

insbesondere kann man $p = 0$ setzen. Dann wird $w = -\frac{\eta''}{2\eta'}$. Diese specielle Riccati'sche Function ist in unserm Schwarz'schen Differentialparameter

$$\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -2\left(\frac{d\left(-\frac{\eta''}{2\eta'}\right)}{dx} + \left(-\frac{\eta''}{2\eta'}\right)^2\right) = -2\left(\frac{dw}{dx} + w^2\right)$$

unmittelbar enthalten, und die Resolvente 3. Grades ist also für $p = 0$ nur eine andere Schreibweise für die Resolvente ersten Grades und umgekehrt.

In der That geht bei dem Bildungsgesetz des Schwarz'schen Differentialparameters unsere Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{d\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)}{dx} - \frac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2q$$

sofort in eine Riccatische Gleichung

$$\frac{dw}{dx} = -q - w^2$$

über, indem man $-\frac{\eta''}{2\eta'} = w$ setzt.

Soviel über das Verhältnis unserer Untersuchungen zu der Betrachtungsweise von Lie.

Ich muß nun schließlich noch einige historische Bemerkungen betreffs der ursprünglichen Riccatischen Gleichung und mit ihr zusammenhängender Probleme zufügen.

Wenn wir allgemein die Gleichung

$$\frac{dw}{dx} = A + Bw + Cw^2$$

als „Riccatische Differentialgleichung" benannten, so sind wir damit über Riccati selbst und über die in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Differentialrechnung gebräuchliche Terminologie weit hinausgegangen.

Jacopo Riccati legte 1722 in den Leipziger „Acta eruditorum", Suppl. 8 (dem ersten deutschen mathematischen Journal) die Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dx} = k \cdot x^m - w^2$$

vor, und untersuchte, wann man diese Gleichung durch niedere Functionen integriren könne. Diese Frage werden wir später für lineare Differentialgl. 2. Ordnung ganz allgemein erledigen; das Hauptinteresse aber bietet uns übrigens gerade der Fall, wo die Gleichung nicht durch niedere Functionen zu integriren ist, wo sie also eine neue Gattung von Functionen definirt, und es ist uns am meisten an dem Beweis gelegen, daß die Gleichung im allgemeinen Falle nicht durch niedere Functionen integrirbar ist. Es ist dies eben der moderne functionentheoretische Standpunkt, entgegengesetzt der noch in den meisten Lehrbüchern vertretenen

traditionellen mond-ockelhaften Auffassung (cf. S. 93)

Die der eigentlichen Riccati'schen Differentialgleichung entsprechende lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Resolvente sie ist, lautet:

$$y'' = k x^{m} y .$$

Morgen werden wir den Zusammenhang dieser Gleichung mit der sogenannten „Bessel'schen Differentialgleichung" kennen lernen, welch' letztere man durch eine einfache Transformation aus unserer Gleichung erhält.

15. Jan. 94.

Wenn wir heute, wie wir es in der vorigen Stunde in Aussicht stellten, die zur eigentlichen Riccati'schen Differentialgleichung gehörige lineare Differentialgleichung

$$y'' = k x^{m} y$$

etwas näher ins Auge fassen wollen, so können wir jedenfalls von vornherein sagen, daß (abgesehen vom Falle $m = -2$ der nur auf Potenzen als Lösungen führt) der Wert der Constanten k unwesentlich ist, da man ihn durch eine Substitution cx für x in jeden andern Werte überführen kann.

Wir setzen m als reell voraus. So lange m keine ganze Zahl ist, sind die Punkte 0 und ∞ Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche, auf

welcher man jetzt die Lösungen y_1, y_2 ebenso zu studiren hat, wie früher bei den Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten auf der schlichten x-Ebene: dabei spielen in der Umgebung der Punkte 0 und ∞ Entwicklungen, welche nach Potenzen von $x^{\frac{1}{m_2}}$ bezw. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{m_2}}$, unter m_2 den Nenner von m verstanden, fortschreiten, dieselbe Rolle, wie an einer anderen Stelle x_0 Entwicklungen nach Potenzen von $x - x_0$.

Dabei können aber die Stellen 0 und ∞ jede singulär oder nicht singulär sein, und zwar bei ganzzahligem m folgendermaßen:

Wenn $m \geqq 0$ ist, so ist der Punkt $x = 0$ ein gewöhnlicher Punkt, der Punkt $x = \infty$ ein singulärer Punkt von irregulärem Verhalten, d.h. so daß sich keine zugehörigen Exponenten angeben lassen.

Wenn $m = -1$ ist, so ist $x = 0$ ein regulär-singulärer Punkt, $x = \infty$ ein irregulär-singulärer Punkt.

Für $m = -2$ sind $x = 0$ und $x = \infty$ beide regulär-singulär.

Für $m = -3$ ist $x = 0$ irregulär, $x = \infty$ regulär-singulär.

Für $m \leqq -4$ ist $x = 0$ irregulär, $x = \infty$ nicht singulär.

Ich will nun den Zusammenhang der eben besprochenen Gleichung mit der „Bessel'schen Differential-

gleichung" auseinandersetzen. Letztere lautet

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{dv}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \cdot v = 0 .$$

Die Besselsche Differentialgleichung besitzt zwei singuläre Punkte, einen regulären bei $z = 0$ mit den Exponenten $+n$ und $-n$, und einen irregulären bei $z = \infty$.

Die Bessel'sche Differentialgleichung kann als ein Grenzfall der hypergeometrischen Differentialgleichung angesehen werden, welcher eintritt, wenn man die beiden singulären Punkte 1 und ∞ zusammenrücken läßt.

Wir führen diesen Grenzübergang in folgender Weise aus. Die hypergeometrische Differentialgleichung mit den singulären Punkten $0, c, \infty$ nebst den zugehörigen Exponenten $\lambda', \lambda''; \nu', \nu''; \mu', \mu''$ lautet:

$$\mathcal{P}'' + \mathcal{P}' \left\{ \frac{1-\lambda'-\lambda''}{z} + \frac{1-\nu'-\nu''}{z-c} \right\} + \frac{\mathcal{P}}{z(z-c)} \left\{ -\frac{c\lambda'\lambda''}{z} + \mu'\mu'' + \frac{c\nu'\nu''}{z-c} \right\} = 0$$

Wir setzen hierin $\lambda' = +n$, $\lambda'' = -n$ und schreiben die Gleichung folgendermaßen um:

$$\mathcal{P}'' + \mathcal{P}' \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1-\nu'-\nu''}{z-c} \right\} + \mathcal{P} \left\{ \frac{cn^2}{z^2(z-c)} + \frac{\mu'\mu'' - \nu'\nu''}{z(z-c)} + \frac{\nu'\nu''}{(z-c)^2} \right\} = 0.$$

Nun lassen wir c gegen ∞ wachsen, zugleich

über auch v' und v'', und zwar derart, daß $v'+v''$ endlich bleibt und $\lim \frac{v'v''}{c^2} = 1$ ist.
Ebenso lassen wir u' und u'' wachsen, und zwar so, daß $u'u'' - v'v''$ endlich bleibt. Dann bekommt man die Gleichung

$$\mathcal{P}'' + \frac{1}{z}\mathcal{P}' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right)\mathcal{P} = 0,$$

d.h. in der That genau die Bessel'sche Gleichung.

Es handelt sich nun um den Zusammenhang dieser Bessel'schen mit der Riccati'schen Differentialgleichung. Wir werden denselben durch eine einfache Substitution herstellen können.

Die Bessel'sche Gleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dv}{dz} + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) \cdot v = 0$$

besitzt bei $z=0$ zwei Particularlösungen der Gestalt:

$$v_1 = z^n \cdot P_1(z^2), \quad v_2 = z^{-n} P_2(z^2).$$

Setzen wir

$$y = z^n \cdot v,$$

so wird y bei $z=0$ die beiden Zweige haben

$$y_1 = z^{2n} \cdot P_1(z^2) \quad y_2 = P_2(z^2),$$

also die Exponenten 0 und $2n$

Setzen wir nun

$$x = z^{2n}$$

so bekommen wir Entwicklungen der Gestalt:

$$y_1 = x \cdot P_1(x^{\frac{1}{n}}), \quad y_2 = P_2(x^{\frac{1}{n}}),$$

also in der x-Ebene gemessen die Exponenten 0 und 1, freilich keine Unverzweigtheit an der Stelle $x = 0$. Dementsprechend werden auch die Coefficienten der zugehörigen Differentialgleichung im Allgemeinen bei $x = 0$ verzweigt sein, wie es ja bei der Differentialgleichung $y'' = k x^m y$ in der That im Allgemeinen der Fall ist.

Die Rechnung verläuft folgendermaßen:

Die Differentialgleichung für $y = z^n v$ als Function von z lautet:

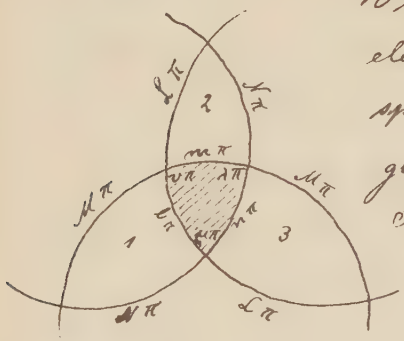
$$\frac{d^2 y}{d z^2} + \frac{1 - 2n}{z} \cdot \frac{dy}{dz} + y = 0,$$

und hieraus gewinnt man durch die Substitution $x = z^{2n}$ die gewünschte Gestalt:

$$\frac{d y^2}{d x^2} = -\frac{1}{4n^2} \cdot x^{\frac{1}{n} - 2} \cdot y.$$

Wir kommen von der Bessel'schen Differentialgleichung zu der Gleichung $y'' = k x^m y$, welche der Riccati'schen Gleichung äquivalent ist, indem wir eine doppelte Substitution machen, welche dem Punkte $z = 0$ die Exponenten 1 und 0 erteilt, allerdings im Allgemeinen daselbst einen Verzweigungspunkt einführt, wie dies in der Natur der Sache liegt.

Damit schließe ich diesen Excurs über die Riccati'sche Differentialgleichung und will jetzt dazu übergehen, als Hülfsmittel für unsere geometrischen Betrachtungen, die wir auf der η-Kugel anzustellen haben werden, die Formeln <u>der sphärischen Trigonometrie</u> zusammenzustellen und einige Bemerkungen an dieselben anzuknüpfen.



Wir wollen zunächst in ganz elementarer Weise unter einem sphärischen Dreieck ein von drei größten Kugelkreisen begrenztes Flächenstück der Kugel verstehen.

Wir haben in der elementaren Geometrie die Ecken, die Seiten und außerdem die Fläche des Dreiecks immer gleichzeitig vor Augen.

Das hat hier deswegen keine Schwierigkeit, weil man in der elementaren Geometrie die Winkel und Seiten der Bedingung unterwirft, zwischen 0 und π zu liegen.

Die Aufgabe ist dann, die Gesammtheit der algebraischen Relationen zwischen den 12 Größen

$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\lambda\pi)$, $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\mu\pi)$, $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\nu\pi)$; $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(l\pi)$, $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(m\pi)$, $\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(n\pi)$

aufzustellen.

Ehe man daran geht, diese Relationen wirklich aufzustellen und hinzuschreiben, wird man gut thun, sich vorher die Symmetrieverhältnisse des Problems genauer anzusehen, weil uns die Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse oft gestattet, aus einer einzigen Relation durch einfache Buchstabenvertauschung oder andere einfache Umsetzung eine ganze Reihe anderer Relationen abzuleiten, so dass man nur immer eine Relation einer solchen Gruppe von gleichberechtigten Relationen wirklich hinzuschreiben braucht.

Zuerst ist klar, dass wir die Zahlenpaare $\lambda\, l$, $u\, m$, $v\, n$ beliebig untereinander vertauschen dürfen, d.h. dass bei dieser Gruppe G_6 von 6 Operationen die Gesammtheit der aufzustellenden Relationen in sich übergehen muss.

Ferner entspricht dem Übergang von dem schraffirten Dreieck zu je einem der Nachbardreiecke 1) 2) 3) die Versetzung der Zahlen der ersten Zeile beistehenden Schemas durch die Zahlen der 2ten, 3ten, 4ten Zeile

λ	u	v	l	m	n	
λ	$1-u$	$1-v$	l	$1-m$	$1-n$	(1
$1-\lambda$	u	$1-v$	$1-l$	n	$1-n$	(2
$1-\lambda$	$1-u$	v	$1-l$	$1-m$	n	(3

Diese Substitutionen bilden mit der Identität zusammen eine Gruppe G_4, welche ebenfalls die

Gesamtheit unserer Relationen in sich überführen muß.

Endlich entspricht der Übergang zum Polardreieck der folgenden Substitution: $\lambda\ \mu\ \nu\ l\ m\ n$, welche mit der Identität $1-l\ \ 1-m\ \ 1-n\ \ 1-\lambda\ \ 1-\mu\ \ 1-\nu$ eine Gruppe G_2 bildet

Combiniren wir endlich diese drei Gruppen G_6, G_4, G_2 miteinander, so bekommen wir als Symmetriegruppe des Problems eine G_{48} von 48 Operationen.

Wir haben auf Grund dieser Überlegungen 48 Operationen für die 6 Größen $\lambda, \mu, \nu, l, m, n$, bei welchen die aufzustellenden Formeln der sphärischen Trigonometrie ungeändert bleiben müssen.

Für der Schreibung ist der Übergang zum Polardreieck noch etwas unbequem, indem sich Sinus und Cosinus dabei verschieden verhalten. Diesen Misstand kann man aber leicht durch eine Änderung in der Benennung der Winkel oder der Seitenlängen beseitigen. Da uns wegen des Anschlusses an die Theorie der η-Function daran liegt, daß die gewöhnliche Benennung der Winkel erhalten bleibt, so wollen wir statt der Seitenlängen

$l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ deren Supplemente $\mathcal{L}\pi = (1-l)\pi$, $\mathcal{M}\pi = (1-m)\pi$, $\mathcal{N}\pi = (1-n)\pi$ in die Betrachtung einführen. Dann heißt nämlich die dem Übergang zum Polardreieck entsprechende Substitution einfach

$$\left| \begin{matrix} \lambda & u & v & \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} \\ \mathcal{L} & \mathcal{M} & \mathcal{N} & \lambda & u & v \end{matrix} \right|.$$

Also:

Indem wir statt $l\ m\ n$ die Zahlen $\mathcal{L} = 1-l$, $\mathcal{M} = 1-m$, $\mathcal{N} = 1-n$ einführen, wird der Übergang zum Polardreieck einfach dadurch gegeben, daß wir die λ, u, v mit den $\mathcal{L}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{N}$ vertauschen.

Di. 16. Jan. 94

Die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sind die folgenden: (wobei wir der Kürze halber statt $\lambda\pi$, $l\pi$ u. s. w. λ, l ... schreiben)

1.) Sinssatz $\sin\lambda : \sin u : \sin v = \sin\mathcal{L} : \sin\mathcal{M} : \sin\mathcal{N}$

2.) Cosinussatz für Winkel: $\cos\lambda = -\cos u \cos v - \sin u \sin v \cos\mathcal{L}$

" für Seiten: $\cos\mathcal{L} = -\cos\mathcal{M}\cos\mathcal{N} - \sin\mathcal{M}\sin\mathcal{N}\cos\lambda$,

3.) Tangenssatz: $\sin\lambda \cot u + \sin\mathcal{N}\cot\mathcal{M} = \cos\lambda \cos\mathcal{N}$.

Die beiden Cosinussätze gehen der eine aus dem andern durch die $\mathfrak{G}_2$ hervor, welche dem Übergang zum Polardreieck entspricht.

Aus den hingeschriebenen Grundformeln der sphärischen Trigonometrie gehen alle anderen durch bloße Vertauschungen der Buchstaben, d. h. durch die Operationen der $\mathfrak{G}_6$ hervor.

In diesen gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie tritt noch eine andere Formelgruppe, in welcher die trigonometrischen

Functionen der halben Winkel vorkommen, und welche unter den Namen „Gauß'sche Formeln" bekannt sind, weil sie Gauß 1809 in der „Theoria motus corporum coelestium" № 54 bekannt gegeben hat. Thatsächlich aber sind diese Formeln kurz vorher schon von zwei andern Astronomen gleichzeitig gefunden worden, nämlich von Delambre, Professor der Astronomie in Paris, welcher die Formeln 1808 in dem von ihm herausgegebenen astronomischen Jahr-Buch: „Connaissance des temps" veröffentlichte, und von dem Leipziger Professor Mallweide, welcher ebenfalls 1808 die Formeln angab, und zwar in der astronomischen Zeitschrift „Zach's monatliche Correspondenz"

Nichtsdestoweniger möchte ich aber besonders auf Gauß hinweisen, und zwar wegen einer allgemeinen Bemerkung, welche Gauß an der genannten Stelle macht, auf welche wir nachher noch zurückkommen werden.

Die besagten „Gauß'schen" Formeln sind die folgenden vier, von denen die erste Differenzen, die zweite Summen, die dritte und vierte sowohl Summen wie Differenzen halber Winkel enthalten:

$$\sin\frac{u-v}{2}\cdot\cos\frac{L}{2} = -\sin\frac{M-N}{2}\cos\frac{\lambda}{2},$$
$$\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{L}{2} = -\cos\frac{M+N}{2}\cdot\sin\frac{\lambda}{2},$$
$$\sin\frac{u+v}{2}\cdot\sin\frac{L}{2} = +\cos\frac{M-N}{2}\cdot\cos\frac{\lambda}{2},$$
$$\cos\frac{u-v}{2}\cdot\cos\frac{L}{2} = +\sin\frac{M+N}{2}\cdot\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Was würden wir von dem modernen Standpunkte aus für Fragen an diese Formelsysteme der sphärischen Trigonometrie anzuknüpfen haben?

Wir könnten etwa $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, $\sin u$, $\cos u$ ... $\sin L$, $\cos L$ u.s.w. als Coordinaten eines Punktes in einem 12 dimensionalen Raum R_{12} deuten. In diesem Raume würden diejenigen λ, u, v, L, M, N, welche zusammen bei einem sphärischen Dreieck vorkommen können, eine 3 dimensionale Mannigfaltigkeit R_3 bestimmen, von der jeder Punkt einem bestimmten elementaren sphärischen Dreieck entspräche. Die trigonometrischen Formeln, ebenso die goniometrischen Identitäten $\sin\lambda^2+\cos\lambda^2=1$ u.s.w. würden jede eine in dem R_{12} gelegene algebraische Mannigfaltigkeit R_{11} vorstellen, welche durch die ebengenannte R_3 hindurchginge. Da könnte man nun fragen: Ist die R_3 durch die Gesamtheit der R_{11} vollständig bestimmt? Wie viele der R_{11} genügen zur eindeutigen Bestimmung der R_3? d. h. sind nicht irgend welche der

trigonometrischen Relationen eine Folge der übrigen? Ferner: Was ist die Gesamtheit der algebraischen R_{11}, welche durch die R_3 hindurchgehen? Ich kann nur sagen, daß diese Frage noch nicht beantwortet ist. Ebenso weiß man noch nicht, welches die Ordnung unserer R_3 ist.

Wollen wir die Gauß'schen Relationen mit hereinziehen, so würde man die Sinus und Cosinus der halben Winkel als Coordinaten in einem R_{12} deuten.

Man könnte übrigens die Betrachtungen auch in einem 6 dimensionalen Raum R_6 ausführen, indem man die Tangens der halben Winkel, bezw. bei Mitberücksichtigung der Gauß'schen Formeln die Tangens der vierten Teile der Winkel als Coordinaten deutete; denn durch diese Tangens lassen sich die trigonometrischen Functionen der ganzen bezw. halben Winkel bekanntlich rational ausdrücken.

Um alle diese Sachen auch unmittelbar geometrisch vollständig zu überblicken, am sphärischen Dreieck selbst, müßen wir versuchen, die Definition des sphärischen Dreiecks selbst allgemeiner zu fassen, so daß seine Seiten und Winkel nicht

mehr den Ungleichungen der Elementartrigonometrie unterworfen sind.

Um den allgemeinen Ansatz der analytischen Geometrie, den wir hier vor uns haben, am sphärischen Dreieck selbst deuten zu können, wird es wünschenswerth sein, die Definition des sphärischen Dreiecks so zu stellen, daß $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ als beliebig veränderliche Größen gelten können.

In dieser Hinsicht liegt nun verschiedene Litteratur vor, deren Ergebnisse wir kurz kennen lernen müssen.

Das erste ist jene Stelle bei Gauß in der „Theoria motus corporum coelestium" № 54, dort sagt er direct, daß man die Definition des sphärischen Dreiecks so fassen könne, daß die $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ an keine Ungleichung gebunden wären. Eine eingehende Behandlung dieser Verallgemeinerung, welche mannigfache Vortheile böte, behalte er sich für eine andere Gelegenheit vor.

Der zweite ist Moebius mit den beiden in die Ges. Werke II aufgenommenen Abhandlungen.

1.) Über eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik 1846.

2.) Ableitung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie

in größtmöglicher Allgemeinheit 1860.

Endlich ist ganz neuerdings in Bd. XX der Abhandlungen der sächs. Ges. d. Wissensch. die glänzende Arbeit von Study: „Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen" erschienen. Diese Arbeit ist in ihrem ersten Teil sozusagen die Ausführung des Gauß'schen Programms (während Möbius hier zwischen Gauß und Study etwa in der Mitte steht). Ich werde hier nun die Punkte hervorheben, welche für uns unmittelbar wichtig sind.

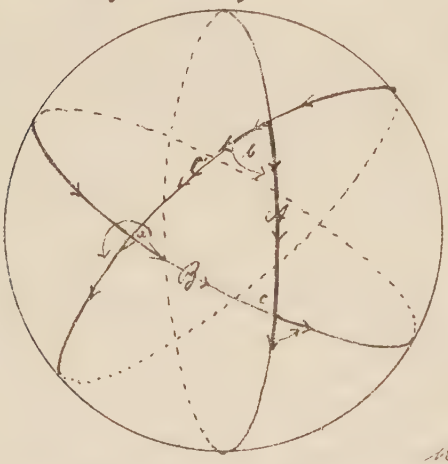
Welches ist die Grundlage für die bezeichnete Verallgemeinerung der Auffassung von Möbius und Study?

1.) Die Hauptsache ist, daß sie sich um die Fläche des Dreiecks, um die Membran, welche wir uns zwischen den Seiten ausgespannt denken mögen, nicht kümmern, vielmehr nur die 3 Seitenlängen und die 3 Winkelgrößen in Betracht ziehen.*)

Wir haben auf der Kugel 3 größte Kreise, die sich in 6 Punkten schneiden (Fig. der folgenden Seite)

*) Später werden wir die betr. Betrachtungen dann allerdings wieder dadurch vervollständigen müssen, daß wir nach der zugehörigen Dreiecksfläche, d.h. der Membran fragen. Denn nur so werden die Resultate für unsere functionentheoretischen Interessen brauchbar.

Von diesen 6 Punkten wählen wir irgend 3 Punkte aus, von denen keine zwei diametral gegenüber liegen, und benennen sie mit a, b, c. Auf jedem der Kreise legen wir eine bestimmte Durchlaufungsrichtung fest, etwa in der durch die Pfeilspitzen angedeuteten Weise.



Unter der Seite ab verstehen wir dann einen in der Richtung der Pfeilspitze von a nach b laufenden Kreisbogen, also in unserer Figur den hinten herum führenden Bogen. Dabei hindert uns aber nichts, den Bogen so oft um die ganze Kreisperipherie herumlaufen zu lassen, wie wir wollen, und ihn etwa erst nach n ganzen Umläufen in b endigen zu lassen. Die Seite ab ist also durch die Figur selbst nach Festlegung der Durchlaufungsrichtungen erst bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt. Ebenso ist es mit den Seiten ab, bc, ca. Von all diesen möglichen Werten der Seiten ab, bc, ca wählen wir nun je irgend einen beliebig aus, und nennen ihn $(1-L)\cdot\pi$, $(1-M)\cdot\pi$, $(1-N)\cdot\pi$

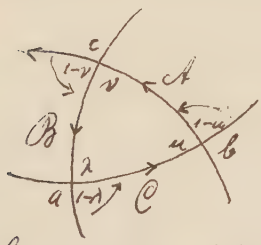
Die Stücke $1-L$, $1-M$, $1-N$ sind durch die Festsetzung der positiven Richtung auf jedem der 3 Kreise nur erst bis auf Multipla von 2 bestimmt, und müssen durch neue Verabredung erst ihrem absoluten Betrage nach festgelegt werden.

Ferner müssen wir für den positiven Sinn der Winkel eine Verabredung treffen. Wir setzen etwa fest, daß ein Winkel „positiv" ist, wenn er einem auf die betreffende Stelle der Kugel von außen blickenden Auge als eine Drehung entgegengesetzt dem Drehungssinne des Uhrzeigers erscheint. Dann wird zu sagen sein, indem wir uns auf die schon getroffene Festsetzung bezüglich des positiven Durchlaufungssinnes der Kreise A, B, C stützen:

Der Winkel BC ist derjenige Winkel in Punkte a, um welchen ich die positive Richtung B im positiven Sinne drehen muß, damit sie in die positive Richtung C hineinfällt.

Mit dieser Angabe sind aber die Winkel erst bis auf Multipla von 2π festgelegt. Es ist nun wieder, wie bei den Seiten, unter den verschiedenen so möglichen Werten durch Verabredung je ein bestimmter auszuwählen. Die so ausgewählten Werte der Winkel sollen mit $(1-\lambda)\pi$, $(1-\mu)\pi$, $(1-\nu)\pi$ bezeichnet werden.

Es ist leicht zu sehen, daß die so in allgemeiner Weise eingeführten Zahlen λ, μ, ν, L, M, N mit den früher beim elementaren sphärischen Dreieck eingeführten Benennungen sich im Einklang befinden. Bringen wir die Pfeile in der Weise an, wie in nebenstehender Figur angedeutet,



und wählen für die Größen $(1-\lambda)\pi$, $(1-\mu)\pi$ u. s. w. die kleinsten positiven Werte, so werden in der That die Seiten wie früher, die Benennung $(1-L)\pi, (1-M)\pi, (1-N)\pi$ tragen, die Außenwinkel die Benennung $(1-\lambda)\pi, (1-\mu)\pi, (1-\nu)\pi$, so daß also die Dreiecks-winkel selbst $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ sind, wie es sein soll. –

Wir werden fortan den hiermit entwickelten allgemeinen Dreiecksbegriff zu Grunde legen, wie ihn Study hat, und den Gauß schon in Aussicht nahm, also Dreiecke mit absoluter Festlegung der Winkel und Seiten, während Möbius von den Vielfachen von 2π noch absah. – [Do. 18. Jan 94.]

Für unsere Bemerkungen über die sphärische Trigonometrie wird eine Art Einteilung zweckmäßig sein, wie sie ganz analog in dem Buche über die elliptischen Modulfunctionen in Bezug

auf letztere getroffen ist. Wir werden nämlich die Winkelgrößen λ, u, v, L, M, N als transcendente Variablen ansehen, insofern sie transcendente analytische Functionen der gewöhnlichen rechtwinkligen Raumcoordinaten sind, dagegen die trigonometrischen Functionen der Winkelgrößen werden wir als algebraische Variablen zu bezeichnen haben, aus dem entsprechenden Grunde.

Betrachten wir nun die Winkelgrößen λ u v L M N selbst, und untersuchen die für dieselben geltenden Relationen, insofern sie zusammen einem Dreieck angehören, so werden natürlich alle Dreiecke mit verschiedenen Winkeln oder Seiten als verschieden zu gelten haben. Diese Art der Trigonometrie, die eigentlich grundlegende, werden wir nach den zur Untersuchung kommenden Variablen als transcendente Trigonometrie benennen.

Im Gegensatz dazu können wir uns darauf beschränken, nur die zwischen den trigonometrischen Functionen $\sin\lambda$, $\cos\lambda$, $\sin u$, $\cos u$ .... $\sin N$, $\cos N$ bestehenden Relationen zu betrachten. Dann werden Dreiecke, deren Winkel und Seiten sich nur um Vielfache von 2π unterscheiden, als identisch anzusehen sein. Diese

Trigonometrie müssen wir algebraische Trigonometrie nennen, und zwar nennen wir die eben bezeichnete, welche die Winkelgrößen mod 2π betrachtet, die algebraische Trigonometrie 1. Stufe.

Ziehen wir jedoch auch die Gauß'schen Formeln mit in den Kreis der Betrachtungen, untersuchen wir also – allgemein zu reden, – die algebraischen Relationen zwischen den trigonometrischen Functionen der halben Winkel und Seiten, so erscheinen erst solche Dreiecke identisch, deren Winkel und Seiten sich um Multipla von 4π unterscheiden. Auch dies wäre eine algebraische Trigonometrie, die wir aber als solche der 2. Stufe benennen werden. In genau derselben Weise könnte man von einer algebraischen Trigonometrie 3. Stufe, 4. Stufe u. s. w. sprechen, in welcher die Winkel modulo 6π, 8π u. s. w. betrachtet würden, in welcher dementsprechend die sin und cos. der dritten, vierten u. s. w. Teile der Winkel und Seiten als Variable zu benutzen wären. Wir haben also folgende Einteilung:

1. Transcendente Trigonometrie.
2. Algebraische Trigonometrie:
   α) 1. Stufe: Winkel u. Seiten (mod 2π), Relationen zw.

$\sin/\cos\,\lambda$, $\sin/\cos\,\mu$, $\sin/\cos\,\nu$, $\sin/\cos\,\mathcal{L}$, $\sin/\cos\,\mathcal{M}$, $\sin/\cos\,\mathcal{N}$.

B.) 2. Stufe: Winkel u. Seiten (mod. 4π), Relationen zw. $\sin/\cos\left(\frac{\lambda}{2}\right)$, $\sin/\cos\left(\frac{\mu}{2}\right)$, $\sin/\cos\left(\frac{\nu}{2}\right)$; $\sin/\cos\left(\frac{\mathcal{L}}{2}\right)$, $\sin/\cos\left(\frac{\mathcal{M}}{2}\right)$, $\sin/\cos\left(\frac{\mathcal{N}}{2}\right)$, d. h. Gauß'sche Relationen etc.

Nun wollen wir zu diesen hiermit unterschiedenen einzelnen Arten der Trigonometrie einige Bemerkungen geben.

1. In der <u>transcendenten Trigonometrie</u> ist eine besonders interessante Frage die nach der Gesamtheit aller derjenigen sphärischen Dreiecke, welche von Kreisbogen derselben drei Hauptkreise der Kugel begrenzt werden. Wir können das auch so ausdrücken: Denken wir uns die 3 Ebenen construirt, in welchen die drei begrenzenden Hauptkreise liegen, so erhalten wir ein räumliches Dreikant, auf dessen Kanten die Winkel, auf dessen Flächen die Seiten des sphärischen Dreiecks liegen. Ein solches räumliches Gebilde wollen wir allgemein den „<u>Kern</u>" der sphärischen Figur nennen. Dann ist unsere Frage auch so auszudrücken: Welches ist die Gesammtheit der Dreiecke mit gemeinsamen Kern? <u>Solche Dreiecke, welche denselben Kern haben,</u>

deren Seiten also auf denselben größten Kreisen liegen, wollen wir verwandte Dreiecke nennen: Es ist diese Benennung bereits mit Rücksicht darauf gewählt, daß solche Dreiecke, wenn die Winkel und Seiten in gleichem Sinn auf einander folgen, zu „verwandten" hypergeometrischen Functionen gehören, wie weiter unten ausführlich zu erläutern sein wird.

In Bezug auf diese verwandten Dreiecke gibt nun Study folgende Formeln:

Die Winkel und Seiten aller verwandten Dreiecke gehen aus den Winkeln und Seiten eines derselben durch die Formeln hervor:

$$\lambda' = (-1)^{\varrho}\cdot\lambda + P \qquad \mathcal{L}' = (-1)^{\tau}\cdot\mathcal{L} + \mathcal{R}$$

$$\mu' = (-1)^{\sigma}\cdot\mu + \Sigma \qquad \mathcal{M}' = (-1)^{s}\,\mathcal{M} + \mathcal{S}$$

$$\nu' = (-1)^{\tau}\cdot\nu + T \qquad \mathcal{N}' = (-1)^{t}\,\mathcal{N} + \mathcal{T},$$

wobei die ganzen Zahlen $\varrho, \sigma, \tau, P, \Sigma, T$ und $r, s, t, \mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ folgenden Bedingungen genügen:

$$\left.\begin{aligned} P &\equiv s+t \\ \Sigma &\equiv t+r \\ T &\equiv r+s \end{aligned}\right\}(\text{mod. } 2), \qquad \left.\begin{aligned} \mathcal{R} &\equiv \sigma+\tau \\ \mathcal{S} &\equiv \tau+\varrho \\ \mathcal{T} &\equiv \varrho+\sigma \end{aligned}\right\}(\text{mod. } 2).$$

Dieses ist aber auch die einzige Einschränkung. In jedem diesen Congruenzen genügenden System

ganze Zahlen gibt es wirklich ein und zwar nur ein Dreieck. Dabei kommt es bei den Zahlen $\varrho, \sigma, \tau, r, s, t$ offenbar nur darauf an, ob dieselben einzeln genommen gerade oder ungerade sind. Es gibt aber 64 verschiedene Combinationen in dieser Hinsicht. Bei bestimmter Wahl der $\varrho\sigma\tau rst$ sind dann die $P\Sigma T\ R S T$ nur noch bis auf Multipla von 2 beliebig, es ist also auch der Charakter dieser Zahlen (mod. 2) festgelegt. Wir können daher sagen:

Die gesammte Verwandtschaft eines Dreiecks zerfällt nach der Art der Vorzeichen in 64 „Stämme" und innerhalb eines Stammes unterscheiden sich die einzelnen Individuen um beliebige Multipla von 2π in den Winkeln und Seiten.

Wir können unsere Formeln auch in folgender Weise auffassen:

Unsere Formeln repräsentiren anders aufgefasst eine unendliche Gruppe linearer Substitutionen, welche aus einem beliebigen Dreiecke die sämtlichen Dreiecke der Verwandtschaft hervorgehen lassen.

Wir werden nach den Untergruppen, insbesondere nach den ausgezeichneten Untergruppen dieser Gruppe zu fragen haben. Da zeigt sich nun:

Innerhalb der Gesamtheit unserer Operationen gibt es eine ausgezeichnete Untergruppe vom Index 2, nämlich die Gesammtheit der „Operationen 1. Classe" welche durch die Congruenz

$$\frac{P+\Sigma+T+R+S+T}{2} + s(s+t)+t(t+r)+r(r+s) \equiv 0 \pmod 2$$

erklärt sind.

In der That folgt aus den für $P, \Sigma, \ldots S, T$ geltenden Congruenzen, daß die Summe dieser Zahlen eine gerade Zahl, der eben angeführte Ausdruck also wirklich eine ganze Zahl ist. Diejenigen Operationen nun, für welche diese ganze Zahl eine gerade Zahl ist, heißen Operationen 1. Classe, die andern Operationen 2. Classe, und es zeigt sich dann, daß die Operationen 1. Classe für sich eine Gruppe bilden, welche die Hälfte der Operationen der Gesamtgruppe umfaßt, d.h. eine Untergruppe vom Index 2, welche natürlich eine ausgezeichnete Untergruppe ist.

Gehen wir einen Augenblick zur geometrischen Figur zurück, so ist ersichtlich, daß zu der Verwandtschaft insbesondere 8 Elementardreiecke auf der Kugel gehören:

In jeder Verwandtschaft finden sich 8 elementare Dreiecke, die morphologisch gleichwertig sind.

Man nennt nämlich zwei Figuren morphologisch

gleichwertig, wenn sie durch blose stetige Verzerrung in einander überführbar sind. Ferner zeigt sich:

Die 8 Elementardreiecke gehen durch Operationen 1. Classe in einander über. (Man vergl. die Formeln auf S. 285.)

Wir können uns nun die ganze Verwandtschaft aus irgend einem dieser elementaren Dreiecke erzeugt denken. Das führt nun zu einer Classeneinteilung auch der Dreiecke, je nachdem sie durch eine Operation 1. oder 2. Classe aus einem elementaren Dreieck hervorgehen, wobei es gleichgültig ist, welches der elementaren Dreiecke wir als Ausgangsdreieck wählen, da ja diese durch Operationen 1. Classe mit einander verbunden sind. Also:

Dreiecke erster Classe nennen wir solche Dreiecke welche aus einem elementaren Dreieck durch Substitutionen erster Classe hervorgehen, wir nennen Dreiecke 2. Classe die andern, welche aus einem elementaren Dreieck durch Substitutionen 2. Classe entstehen.

Study gibt nun für die beiden Arten von Dreiecken den folgenden fundamentalen Satz:

Die Dreiecke 1. Classe bilden für sich ein Continuum und die Dreiecke 2. Classe für sich ebenfalls

und diese beiden Continua sind von einander ganz getrennt.

Es soll das heißen, daß man alle Dreiecke erster Classe durch stetige Abänderung der Bestimmungsstücke aus einem beliebigen derselben erhalten kann, ebenso alle Dreiecke 2. Classe aus einem beliebigen Dreieck 2. Classe, nie aber ein Dreieck 2. Classe aus einem Dreieck 1. Classe oder umgekehrt. Den genauen Beweis für diese letztere Behauptung, d. h. den Nachweis, daß die beiden Mannigfaltigkeiten auch im Complexen nicht zusammenhängen, werden wir erst morgen kennen lernen. Heute wollen wir nur die Continuität etwa der Dreiecke 1. Classe an einem Beispiel nachweisen.

Es mögen die Zahlen λ μ ν $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{M}$ $\mathfrak{N}$ einem elementaren Dreieck entsprechen; dann sind durch:

1.) $\lambda' = \lambda + 2$ $\quad \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$ $\qquad$ 2.) $\lambda' = \lambda + 2$ $\quad \mathfrak{L}' = \mathfrak{L} + 2$

$\mu' = \mu + 2$ $\quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$ $\qquad \mu' = \mu$ $\quad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$

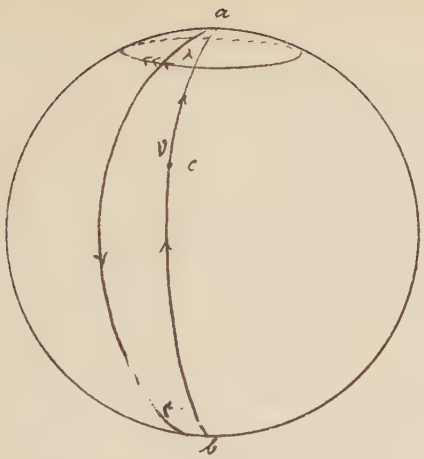
$\nu' = \nu$ $\quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ $\qquad \nu' = \nu$ $\quad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$

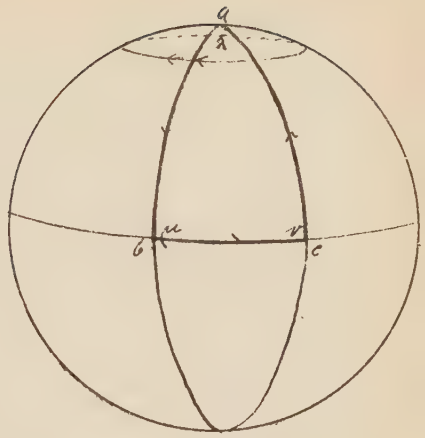
zwei Dreiecke 1. Classe definirt, und durch folgende Formeln ein Dreieck 2. Classe:

3.) $\lambda' = \lambda + 2$ $\qquad \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$

$\mu' = \mu$ $\qquad \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$

$\nu' = \nu$ $\qquad \mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$





Um das elementare Dreieck in das Dreieck 1) stetig zu deformiren, können wir dasselbe zunächst z. B. in das Dreieck der ersten Figur stetig überführen, was gewiss möglich ist, um dann die zum Meridian gewordene Seite ab um 2π in der Spielrichtung herumzudrehen. Dabei wachsen λ und v um je $\frac{1}{2}$, während alles andere ungeändert bleibt. Dann braucht man nur den anfänglichen Deformationsprocess rückwärts zu durchlaufen, um das gewünschte Dreieck zu erhalten. Man wählt dabei nur das in der zweiten Figur dargestellte Dreieck als Übergangsdreieck.

Für Dreieck 3) wird sich aber kein solcher stetiger Übergang finden lassen.

In ähnlicher Weise kann man sich überzeugen, dass überhaupt alle Dreiecke 1. Classe durch

Continuität in einander übergehen, während der strenge Beweis, dass es unmöglich ist, zwei Dreiecke aus verschiedenen Classen miteinander durch Continuität zu verbinden, sogar nicht bei continuirlicher Abänderung im Complexen, erst später zu führen sein wird. [Fr. 19. Jan. 94.]

Die gestrigen Betrachtungen gehörten ins Gebiet der transcendenten Trigonometrie, in der alle Dreiecke mit verschiedenen Winkeln und Seiten wirklich als verschieden gelten.

In der algebraischen Trigonometrie 1. Stufe dagegen werden nun die Sinus und Cosinus von $\lambda\, u - v\, \lambda\, M\, N$ betrachtet, so dass die Zahlen $\lambda\, u\, v\, L\, M\, N$ nur (mod 2) in Betracht kommen. Es ist dies dasselbe, was die Elementare sphärische Trigonometrie thut. Dabei ist aber unser Dreiecksbegriff in allgemeinerer als der Elementare, insofern wir die Winkel und Seiten beliebig im Intervall von 0 bis 2π betrachten wollen. Der zutreffende Begriff des sphärischen Dreiecks für die algebraische sphärische Trigonometrie 1. Stufe ist der Dreiecksbegriff von Möbius.

Entsprechend diesem allgemeineren Dreiecksbegriff werden wir sehen, dass die Symmetrie der Formeln der Trigonometrie 1. Stufe eine weit höhere ist,

als in der elementaren Trigonometrie hervortritt. Wir sagen zunächst:

Beim Übergang zum Nebendreieck bleiben die Sinus ungeändert und die Cosinus von immer zwei entsprechenden Winkeln und Seiten wechseln das Vorzeichen; in der That geht man zu dem Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, (1-\mu)\pi, (1-\nu)\pi$ und den Seiten $\mathcal{L}\pi, (1-\mathcal{M})\pi, (1-\mathcal{N})\pi$ über, so bleiben die Sinus dieselben, und die Cosinus des neuen Dreiecks heißen:

$$\cos\lambda\pi, -\cos\mu\pi, -\cos\nu\pi; \cos\mathcal{L}\pi, -\cos\mathcal{M}\pi, -\cos\mathcal{N}\pi$$

Das würde eine Gruppe von 4 Substitutionen ergeben. Statt dieser g_4 aber, sage ich, kann man bei unserm allgemeinen Dreiecksbegriff eine g_{64} construiren, welche ebenfalls die Formeln der algebraischen Trigonometrie 1. Stufe in einander überführen muß. Nämlich der Übergang zu allen verwandten Dreiecken wird jetzt, da die Zahlen $P, \Sigma, T, R, S, \mathcal{T}$ von S. 300. nur modulo 2 in Betracht kommen, also durch die rechten Seiten der für sie geltenden Congruenzen ersetzt werden können, durch folgende Substitutionen bewirkt:

$$\begin{aligned} \lambda' &= (-1)^{\rho}\cdot\lambda + s + t, & \mathcal{L}' &= (-1)^{\tau}\cdot\mathcal{L} + \sigma + \tau, \\ \mu' &= (-1)^{\sigma}\cdot\mu + t + r, & \mathcal{M}' &= (-1)^{t}\cdot\mathcal{M} + \tau + \rho, \\ \nu' &= (-1)^{\tau}\cdot\nu + r + s, & \mathcal{N}' &= (-1)^{s}\cdot\mathcal{N} + \rho + \sigma. \end{aligned}$$

Das sind aber, da für $\varrho, \sigma, \tau, r, s, t$ alle Combinationen von 0 und 1 einzusetzen sind, $2^6 = 64$ Substitutionen. Für die Sinus und Cosinus gestalten sich dieselben folgendermaßen:

$$\sin\lambda' = (-1)^{\varrho+s+t} \sin\lambda, \qquad \sin\mathcal{L}' = (-1)^{r+\sigma+\tau} \sin\mathcal{L},$$

$$\sin\mu' = (-1)^{\sigma+t+r} \sin\mu, \qquad \sin\mathcal{M}' = (-1)^{s+\tau+\varrho} \sin\mathcal{M},$$

$$\sin\nu' = (-1)^{\tau+r+s} \sin\nu, \qquad \sin\mathcal{N}' = (-1)^{t+\varrho+\sigma} \sin\mathcal{N},$$

und

$$\cos\lambda' = (-1)^{s+t} \cos\lambda, \qquad \cos\mathcal{L}' = (-1)^{\sigma+\tau} \cos\mathcal{L},$$

$$\cos\mu' = (-1)^{t+r} \cos\mu, \qquad \cos\mathcal{M}' = (-1)^{\tau+\varrho} \cos\mathcal{M},$$

$$\cos\nu' = (-1)^{r+s} \cos\nu, \qquad \cos\mathcal{N}' = (-1)^{\varrho+\sigma} \cos\mathcal{N}.$$

<u>Dies sind in der That 64 Operationen, bei denen unsere trigonometrischen Formeln ungeändert bleiben.</u>

Außer bei diesen g_{64} bleiben die trigonometrischen Formeln, wie wir früher sahen, bei einer g_6 und bei einer g_2 ungeändert, entsprechend einer Vertauschung der $\lambda\ \mu\ \nu$ bezw. der $\mathcal{L}\ \mathcal{M}\ \mathcal{N}$ und dem Übergang zum Polardreieck. Das ergibt den Satz:

<u>Im Ganzen bleiben unsere sphärischen Formeln bei einer Gruppe von $64 \cdot 6 \cdot 2 = 768$ linearen Umänderungen ungeändert.</u>

Wie steht es nun mit der Unterscheidung der Dreiecke 1. und 2. Classe?

Es zeigt sich durch einen Blick auf die definirende

Congruenz S. 302.

Der ganze Unterschied der Dreiecke 1. und 2. Classe kommt hier bei der algebraischen Trigonometrie 1. Stufe noch gar nicht in Betracht. Es gibt für die sphärische Trigonometrie 1. Stufe nur eine Art von Dreiecken; und Möbius hat also bei seinem Ausgangspunkt ganz Recht, wenn er von einem Unterschied der Dreiecke 1. und 2. Classe gar nicht spricht.

Das heißt im R_{12} bezw. R_6 mit $\sin \lambda\pi$ u. s. w. bezw. $tg\, \frac{\lambda}{2}\pi$ u. s. w. als Coordinaten gedeutet:

Bei der algebraischen Trigonometrie 1. Stufe haben wir es, im R_{12} oder R_6, mit einer einzigen irreducibelen algebraischen M_3 zu thun, die nun näher zu untersuchen ist.

Wir haben neulich nach der Ordnung dieser Mannigfaltigkeit gefragt. Alles, was wir über ein- oder mehrdeutige Bestimmtheit von Aufgaben der algebraischen Trigonometrie 1. Stufe wissen, gibt einen Beitrag zur Beantwortung dieser Frage. Z. B. ist es bekannt, wenn L, M, N gegeben sind, daß dann die λ, μ, ν bis auf ein gemeinsames Vorzeichen bestimmt sind. Das heißt aber, etwa im R_6 gedeutet, daß die drei linearen M_5: $tg.\frac{L}{2} = c'$; $tg.\frac{M}{2} = c''$, $tg.\frac{N}{2} = c'''$ mit der M_3 2 Punkte gemein

haben. Daraus können wir schliessen, daß die Ordnung der M_2 mindestens die zweite sein muß. —

Nun kommen wir zur algebraischen Trigonometrie 2. Stufe, in welcher die λ, u, v, L, M, N modul 4 in Betracht gezogen werden, und in welcher die Formeln in $\sin/\cos\left(\frac{\lambda}{2}\pi\right)$ u.s.w. bezw. in $tg\left(\frac{\lambda}{4}\pi\right)$ u.s.w. rational sind.

Da ergibt sich aus der definirenden Congruenz:

Jetzt kommt die Unterscheidung von Dreiecken 1. und 2. Classe zur Geltung.

Man betrachte nun ganz besonders die hieher gehörigen Gaußischen Formeln, z.B. (indem ich jetzt für den Augenblick einmal wieder zur ursprünglichen Bezeichnung der Seiten zurückgehen will):

$$\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{l}{2} = +\sin\frac{m-n}{2}\cos\frac{\lambda}{2}.$$

Die Gaußischen Formeln mit den Vorzeichen, die wir kennen gelernt haben, gelten blos für die Dreiecke 1. Classe. Will man die Dreiecke zweiter Classe betrachten, so muß man die Vorzeichen in allen 4 Gaußischen Formeln gleichzeitig umkehren, also im Beispiel:

$$\sin\frac{u-v}{2}\sin\frac{l}{2} = -\sin\frac{m-n}{2}\cos\frac{\lambda}{2}.$$

Um dies einzusehen sagen wir zunächst:

In der That können wir aus den gewöhnlichen

trigonometrischen Formeln nur die Quadrate der Gaußischen Formeln ableiten, worauf das Vorzeichen, welches durch Ziehen der Quadratwurzel eingeführt wird, zunächst unbestimmt ist.

Um das Vorzeichen zu bestimmen, verfährt man nun folgendermaßen:

Man überzeugt sich zuerst beim elementaren Dreieck, welches Vorzeichen am Platze ist.

Dem größeren Winkel liegt da nämlich immer die größte Seite gegenüber; wenn also $u-v$ positiv ist, ist auch $m-n$ positiv, was mit unserer Formel nur bei positiv gewähltem Vorzeichen vereinbar ist. Wir schließen weiter:

Wenden wir auf ein Dreieck eine Operation 1. Classe an, so werden die Vorzeichen in den Gauß'schen Relationen nicht geändert, bei einer Operation 2. Classe gehen sie dagegen in jeder Formel in das entgegengesetzte Zeichen über.

Man beweist dies durch Einsetzen der Substitutionsausdrücke S. 377 mit Berücksichtigung der für P, Σ, T, R, S, T geltenden Congruenzen und der definirenden Relation auf S. 302.

Da nun beim elementaren Dreieck die früher angegebenen Vorzeichen gelten, da ferner alle Dreiecke

erster Classe durch Operationen 1. Art aus einem elementaren Dreieck entstehen, so gelten dieselben Vorzeichen für alle Dreiecke 1. Classe.

In gleicher Weise folgt aus dem Umstande, daß alle Dreiecke zweiter Classe aus einem elementaren Dreieck durch Operationen 2. Classe gewonnen werden, daß bei allen Dreiecken 2. Classe die Gauß'schen Formeln mit umgekehrten Vorzeichen zu nehmen sind.

Aus dieser Vorzeichenbestimmung der Gauß'schen Formeln folgt nun rückwärts, daß die Mannigfaltigkeiten der Dreiecke erster und zweiter Classe wirklich analytisch verschiedene Mannigfaltigkeiten sind, die nicht einmal im complexen Gebiet analytisch zusammenhängen. Denn sie gehören analytisch ganz verschiedenen Gleichungssystemen.

Aber noch mehr: Die beiden Mannigfaltigkeiten der Dreiecke 1. und 2. Classe haben wenigstens im R_{12} auch räumlich keine reellen oder complexen Elemente gemeinsam, verlaufen also vollständig getrennt von einander, so daß man in der That auch durchs Complexe hindurch kein Dreieck erster Classe in ein solches zweiter Classe stetig überführen kann.

Man sieht nämlich leicht, daß es kein Wertsystem gibt, für welches beide Vorzeichen in den Gauß'schen Relationen gleichzeitig statt hätten; denn für ein solches müßten beide Seiten jeder einzelnen Gleichung verschwinden, und man sieht leicht, daß dies für kein Wertsystem $\lambda\, \mu\, \nu\, L\, M\, N$ möglich ist. Da ferner die Gauß'schen Gleichungen in den Coordinaten des R_{12} homogen sind, so können auch im Unendlichfernen keine Besonderheiten stattfinden, die wir bei Betrachtung endlicher Werte der Coordinaten hätten übersehen können.

Da die Mannigfaltigkeiten der Dreiecke 1. und 2. Classe, wie wir sehen, im algebraischen R_{12} 2. Stufe voneinander getrennt verlaufen, und die Coordinaten dieses Raumes für endliche Argumentwerte eindeutige Functionen der Coordinaten $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ des transcendenten R_6 sind, in welchem die wirkliche Mannigfaltigkeit M_3 der sphärischen Dreiecke liegt (während die M_3 im R_{12} und im R_6 nur gewissermaßen als Projectionen derselben aufzufassen sind), so muß auch die transcendente M_3 der Dreiecke selbst in zwei Mannigfaltigkeiten zerfallen, die für endliche Werte

der λ μ ν L M N weder im Reellen noch im Complexen irgendwo zusammenhängen.

Damit ist der Study'sche Satz auch für Dreiecke mit complexen Elementen bewiesen.

Wir erkennen aus dem Allem die große principielle Wichtigkeit der Gauß'schen Formeln: Während die gewöhnlichen Formeln für beide Mannigfaltigkeiten zugleich gelten, geben die Gauß'schen Formeln eine Unterscheidung beider Mannigfaltigkeiten:

Die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln stellen im Raum 2. Stufe ein System von algebraischen Mannigfaltigkeiten dar, welche noch die beiden M_3 der Dreiecke 1. und 2. Classe mit einander gemein haben. Zwischen diesen beiden Mannigfaltigkeiten scheiden dann erst hinterher die Gauß'schen Formeln, indem sie Mannigfaltigkeiten vorstellen, welche je nach der Wahl der Vorzeichen nur durch die eine oder nur durch die andere der beiden M_3 gehen.

Diese Verhältnisse sind alle schon Gauß bekannt gewesen, wie aus der jetzt zu verstehenden Bemerkung an der schon früher genannten Stelle hervorgeht, wo er sagt:

„Quodsi quidem idea trianguli sphaerici in

maxima generalitate concipitur ...; casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare opportet, ...

[Mo. d. 22 Jan 94.]

Für die nächsten Tage stellen wir uns die Aufgabe, die Formeln der sphärischen Trigonometrie für complexe Werte der Variablen geometrisch zu interpretiren, also die von Schilling gefundenen Resultate zu besprechen, welche zuerst in den Göttinger Nachrichten von 1891 bekannt gegeben und dann noch in Bd. 39 der math. Ann. veröffentlicht worden sind. Eine ausführlichere Begründung derselben ist in der demnächst erscheinenden größeren Arbeit Schillings in Math. Ann. 44. enthalten.

Wir hier wollen die besagte geometrische Deutung in der Weise entwickeln, daß wir uns zunächst von den trigonometrischen Formeln eine Vorstellung im Sinn der reinen Analysis bilden. Da macht sich die Verallgemeinerung ganz von selbst und es fragt sich dann hinterher nur noch um deren geometrische Interpretion.

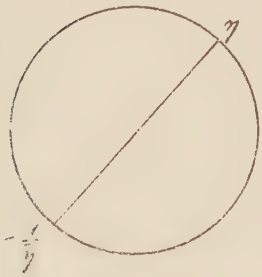
Es möge die complexe Variable η in Riemann's Sinne auf der Einheitskugel gedeutet, d. h. die η-Ebene auf die Einheitskugel stereographisch projicirt werden.

Es geschieht dies durch folgende Formeln, in denen x, y, z die Coordinaten des dem Punkte $\eta = a + ib$ entsprechenden Kugelpunktes vorstellen:

$$\eta = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy},$$

und umgekehrt:

$$x = \frac{2a}{1+a^2+b^2}, \quad y = \frac{2b}{1+a^2+b^2}, \quad z = \frac{-1+a^2+b^2}{1+a^2+b^2}.$$



Es soll nun die analytische Bedingung daf'r aufgestellt werden, daß zwei Werte von η diametral entgegengesetzten Kugelpunkten entsprechen.

Man sieht leicht, wenn man in der Formel für η die Vorzeichen von x, y, z umkehrt, daß dann η in $-\frac{1}{\bar{\eta}}$ übergeht, unter $\bar{\eta}$ den zu $\eta = a + ib$ conjugirten Wert $\eta = a - ib$ verstanden. Irgend zwei diametral gegenüberliegende Kugelpunkte sind also in der Gestalt enthalten:

$$a + ib, \quad -\frac{1}{a-ib}$$

Sie sind also Wurzeln folgender quadratischen Gleichung

$$(\eta - (a+ib))((a-ib)\eta + 1) = 0$$

oder

$$(a-ib)\cdot\eta^2 + (1-a^2-b^2)\eta - (a+ib) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung wollen wir durch Spaltung von η in $\frac{\eta_1}{\eta_2}$ homogen machen, und dann eine „diametrale Form" nennen.

Unter einer diametralen Form verstehen wir also eine Form der Gestalt

$$(a-ib)\eta_1^2 + (1-a^2-b^2)\,\eta_1\eta_2 - (a+ib)\cdot\eta_2^2 .$$

Durch Nullsetzen einer diametralen quadratischen Form wird ein Durchmesser der Kugel festgelegt, und umgekehrt kann jeder Durchmesser in dieser Weise dargestellt werden.

Es seien nun irgend zwei Durchmesser gegeben; zunächst in gewöhnlichen Raumcoordinaten sei ein Endpunkt des einen und ein solcher des andern Durchmessers gegeben durch

$$x = x_1 \qquad \text{und} \qquad x = x_2$$
$$y = y_1 \qquad\qquad\quad y = y_2$$
$$z = z_1 \qquad\qquad\quad z = z_2 .$$

Dann drückt sich der Winkel der beiden Durchmesser folgendermaßen aus:

$$\arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} ,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzeln ganz

unbestimmt ist, dem Umstande entsprechend, daß man ja ganz beliebig irgend einen der vier von den beiden Durchmessern gebildeten Winkel als Winkel zwischen den beiden Geraden ansehen kann.

Wenn uns nun die beiden Durchmesser in Gestalt zweier diametralen quadratischen Formen

$$F_1 = (a_1 - ib_1) \cdot \eta_1^2 + (1 - a_1^2 - b_1^2) \cdot \eta_1 \eta_2 - (a_1 + ib_1) \cdot \eta_2^2 ,$$

$$F_2 = (a_2 - ib_2) \cdot \eta_1^2 + (1 - a_2^2 - b_2^2) \cdot \eta_1 \eta_2 - (a_2 + ib_2) \cdot \eta_2^2$$

gegeben sind, wie drückt sich dann der Winkel zwischen den beiden Durchmessern durch die Constanten der beiden Formen aus?

Wir finden durch Einsetzen der Formeln für x, y, z:

$$\arccos \frac{4a_1 a_2 + 4b_1 b_2 + (1 - a_1^2 - b_1^2)(1 - a_2^2 - b_2^2)}{(1 + a_1^2 + b_1^2)(1 + a_2^2 + b_2^2)} .$$

Der Winkel zweier Durchmesser ist aber allen Drehungen der Kugel gegenüber invariant. Drehungen der Kugel sind gewisse lineare Substitutionen der η_1, η_2, nämlich alle diejenigen, bei denen diametrale quadratische Formen diametrale Formen bleiben. Der Ausdruck des Winkels durch die Coefficienten der beiden diametralen Formen muß daher bei allen linearen Substitutionen der η_1, η_2 ungeändert bleiben, bei denen die

Formen überhaupt diametral bleiben. Wir vermuthen daher, daß der Winkel sich durch die Invarianten der beiden Formen und ihre simultane Invariante ausdrücken läßt.

Für zwei quadratische Formen mit den Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ lauten diese Invarianten $D_{11} = \beta_1^2 - 4\alpha_1\gamma_1$, $D_{22} = \beta_2^2 - 4\alpha_2\gamma_2$, $D_{12} = \beta_1\beta_2 - 2\alpha_1\gamma_2 - 2\alpha_2\gamma_1$.

Für unsere diametralen Formen gehen sie über in:

$$D_{11} = (1 + a_1^2 + b_1^2)^2,$$
$$D_{22} = (1 + a_2^2 + b_2^2)^2,$$
$$D_{12} = 4a_1a_2 + 4b_1b_2 + (1 - a_1^2 - b_1^2)(1 - a_2^2 - b_2^2),$$

und es ergibt sich in der That das einfache Resultat:

<u>Der Winkel, den zwei diametrale quadratische Formen mit einander bilden, drückt sich durch die Invarianten der beiden Formen in dieser Gestalt aus:</u>

$$\arccos \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}} \cdot \sqrt{D_{22}}}$$

<u>Die invariante Natur des Winkels, welche in diesen Formeln hervortritt, ist geometrisch dadurch angezeigt, daß der Winkel der beiden</u>

Formen bei beliebigen Drehungen der Kugel um den Mittelpunkt, was besondere lineare Substitutionen von η sind, ungeändert bleibt.

Insbesondere werden wir, um Anschluss an die in den Modulfunctionen und bei unserer Besprechung der sphärischen Trigonometrie eingeführte Sprechweise zu gewinnen, sagen:

Des Näheren bezeichnen wir den Cosinus und den Sinus des Winkels als algebraische Invarianten erster Stufe der beiden Formen, den Winkel selbst als transcendente Invariante, und werden den Sinus und Cosinus des halben Winkels als algebraische Invarianten zweiter Stufe bezeichnen.

Nun darf ich ja, um weiter vorwärts zu gehen, an den allgemeinen Gedankengang der Invariantentheorie anknüpfen. Demselben zufolge gehört außer den Invarianten zu den beiden Formen auch noch eine simultane Covariante, nämlich die Functionaldeterminante derselben:

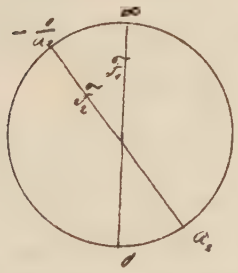
$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \eta_1}, & \frac{\partial F_1}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \eta_1}, & \frac{\partial F_2}{\partial \eta_2} \end{vmatrix}.$$

Ich sage: Diese Functionaldeterminante ist wieder eine diametrale quadratische Form. Sie entspricht

denjenigen Durchmesser, welcher auf den Durchmessern $\mathfrak{F}_1 = 0$ und $\mathfrak{F}_2 = 0$ senkrecht steht. Ihre Discriminante lautet

$$\Delta = -4(\mathfrak{D}_{11}\mathfrak{D}_{22} - \mathfrak{D}_{12}^2)$$

Diese Sätze sind zu beweisen. Zu dem Zwecke können wir, da es sich um invariante, d.h. vom Coordinatensystem unabhängige Beziehungen handelt, uns eines besonders bequem gelegten Coordinatensystems bedienen: Ich lege also etwa den der Form $\mathfrak{F}_1$ entsprechenden Durchmesser vertical von oben nach unten, von ∞ nach 0, also



$$\mathfrak{F}_1 = \eta_1 : \eta_2$$

Den Durchmesser $\mathfrak{F}_2$ lege ich in die xy-Ebene, welche die Axe der reellen Zahlen ausschneidet, setze also $b_2 = 0$ und

$$\mathfrak{F}_2 = a_2\eta_1^2 + (1-a_2^2)\eta_1\eta_2 - a_2\eta_2^2 .$$

Die Invarianten der beiden Formen sind dann

$$\mathfrak{D}_{11} = 1, \quad \mathfrak{D}_{22} = (1+a_2^2)^2, \quad \mathfrak{D}_{12} = 1 - a_2^2 .$$

Die Covariante ist

$$\varphi = -2a_2(\eta_1^2 + \eta_2^2).$$

ihre Invariante

$$\Delta = -16a_2^2 .$$

In der That entspricht hier $\varphi = 0$ dem auf der Zeichenebene senkrecht stehenden Durchmesser, welcher nämlich durch die beiden Punkte $\pm i$ geht, womit die ersten beiden Sätze bewiesen sind; und endlich überzeugt man sich leicht, daß wirklich

$$\Delta = -4(D_{11} D_{22} - D_{12}^2) \quad \text{ist.} -$$

Die so für das specielle Coordinatensystem bewiesenen Sätze müssen von selbst allgemeine Geltung haben. – Nach diesen Vorbereitungen gehen wir daran, unsere eben entwickelten Betrachtungen <u>auf das Dreikant anzuwenden, auf welches sich die Formeln der sphärischen Trigonometrie beziehen.</u>

Gegeben sind 3 Durchmesser der Kugel, es mögen ihnen die diametralen Formen F_1, F_2, F_3 entsprechen. Seien L, M, N die Winkel zwischen je zweien der Durchmesser (mit der schon früher erwähnten Unbestimmtheit), so ist nach unsern Erörterungen

$$\cos L = \frac{D_{23}}{\sqrt{D_{22}}\sqrt{D_{33}}}, \quad \text{und hieraus} \quad \sin L = \frac{\sqrt{D_{22} D_{33} D_{23}^2}}{\sqrt{D_{22}} \cdot \sqrt{D_{33}}} = \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{\Delta_{11}}}{\sqrt{D_{22}}\sqrt{D_{33}}},$$

$$\cos M = \frac{D_{31}}{\sqrt{D_{33}} \cdot \sqrt{D_{11}}}, \qquad \sin M = \frac{\sqrt{D_{31} D_{11} - D_{31}^2}}{\sqrt{D_{33}} \cdot \sqrt{D_{11}}} = \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{\Delta_{22}}}{\sqrt{D_{33}} \cdot \sqrt{D_{11}}},$$

$$\cos N = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}} \cdot \sqrt{D_{22}}}, \qquad \sin N = \frac{\sqrt{D_{11} D_{22} - D_{12}^2}}{\sqrt{D_{11}} \cdot \sqrt{D_{22}}} = \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{\Delta_{33}}}{\sqrt{D_{11}}\sqrt{D_{22}}}.$$

Die Unbestimmtheit in der Definition der Winkel L M N entspricht in diesen Formeln, daß man für jede der vorkommenden Quadratwurzeln das Vorzeichen beliebig wählen darf. Da im Ganzen 6 verschiedene Quadratwurzeln vorkommen, so kann man $2^6 = 64$ verschiedene Verfügungen über die Vorzeichen treffen.

Das ist aber geometrisch nichts anderes, als daß zu demselben Kern 64 sphärische Dreiecke gehören (unter Zugrundelegung des für die Trigonometrie 1. Stufe gültigen Dreiecksbegriffes von Möbius).

Weiter bilden wir uns die Functionaldeterminanten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ von F_2, F_3, von F_3, F_1 und von F_1, F_2. Es entsprechen diesen die auf den Seitenebenen des ursprünglichen Dreikants senkrecht stehenden Durchmesser, mit andern Worten die Kanten des Polarkerns zu dem gegebenen Kern.

Die Winkel zwischen den Kanten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind also nichts anderes als die Winkel an den Kanten F_1, F_2, F_3, d. h. die Eckenwinkel des sphärischen Dreiecks, welches zu dem Kern $F_1\ F_2\ F_3$ gehört. Nennen wir diese Winkel wie früher λ, μ, ν, so drücken sich die Sinus und Cosinus derselben durch die zu $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gehörigen Invarianten so aus

$$\cos \lambda = \frac{\Delta_{23}}{\sqrt{\Delta_{22}}\,\sqrt{\Delta_{33}}}\,, \qquad \sin \lambda = \frac{\sqrt{\Delta_{22}\Delta_{33} - \Delta_{23}^2}}{\sqrt{\Delta_{22}}\,\sqrt{\Delta_{33}}} = c \cdot \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{D_{11}}}{\sqrt{\Delta_{22}}\,\sqrt{\Delta_{33}}}$$

$$\cos \mu = \frac{\Delta_{31}}{\sqrt{\Delta_{33}}\,\sqrt{\Delta_{11}}}\,, \qquad \sin \mu = \frac{\sqrt{\Delta_{33}\Delta_{11} - \Delta_{31}^2}}{\sqrt{\Delta_{33}} \cdot \sqrt{\Delta_{11}}} = c \cdot \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{D_{22}}}{\sqrt{\Delta_{33}}\,\sqrt{\Delta_{11}}}\,,$$

$$\cos \nu = \frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}}\,\sqrt{\Delta_{22}}}\,, \qquad \sin \nu = \frac{\sqrt{\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2}}{\sqrt{\Delta_{11}} \cdot \sqrt{\Delta_{22}}} = c \cdot \frac{\frac{1}{2} i \sqrt{D_{33}}}{\sqrt{\Delta_{11}}\,\sqrt{\Delta_{22}}}\,,$$

wobei für den Ausdruck von $\sin \lambda$, $\sin \mu$, $\sin \nu$ der Umstand benutzt ist, daß die Functionaldeterminanten der Functionaldeterminanten wieder die ursprünglichen Formen sind, nur multiplicirt mit einem gemeinsamen Factor, nämlich $c = 16 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$.

Die Formenreihe, die man erhält, wenn man zu den gegebenen 3 Formen die Functionaldeterminanten, von diesen wieder die Functionaldeterminanten bildet, bricht ab, weil die Functionaldeterminanten der Functionaldeterminanten bis auf einen leicht angebaren Factor die ursprünglichen Formen selbst sind. Aus demselben Grunde bringen die Cosinus und Sinus von λ, μ, ν keine neuen Vorzeichenmöglichkeiten mehr mit sich, weil die Irrationalitäten, die bei ihrer Definition auftreten, dieselben sind, wie bei den Δ No. 1.

[Di. d. 23. Jan 94.]

Wendeten wir die Seiten und Winkel eines sphärischen

Dreiecks rein algebraisch als Invarianten dreier diametralen quadratischen Formen definirt haben, fragen wir: Was bedeuten nun vom invarianten theoretischen Standpunkt die Formeln der sphärischen Trigonometrie?

Wir haben 3 diametrale quadratische Formen:

$$F_1, F_2, F_3,$$

ferner die Functionaldeterminanten je zweier von ihnen, ebenfalls diametrale quadratische Formen:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3.$$

Diese 6 Formen geben uns 6 Invarianten, nämlich die 6 transcendenten Invarianten

$$\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \lambda, \mu, \nu,$$

welche sich als transcendente Functionen der Coefficienten der drei Formen F_1, F_2, F_3 darstellen.

Dazu kommen die 12 algebraischen Invarianten erster Stufe:

$$\cos\mathcal{L}, \cos\mathcal{M}, \cos\mathcal{N}, \cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu,$$
$$\sin\mathcal{L}, \sin\mathcal{M}, \sin\mathcal{N}, \sin\lambda, \sin\mu, \sin\nu,$$

welches algebraische Functionen der Coefficienten sind. Die sphärische Trigonometrie 1. Stufe, als Lehre von den Relationen zwischen diesen letzteren 12 Größen hat daher rein algebraisch genommen

folgende Bedeutung.

Die sphärische Trigonometrie 1. Stufe ist die Lehre von den algebraischen Relationen, welche zwischen den Invarianten 1. Stufe unseres Formensystems statt haben.

Nun behaupte ich. Diese Lehre, die sphärische Trigonometrie, aufgefaßt als die Lehre von den algebraischen Relationen zwischen den Invarianten dreier diametralen Formen, muß auch dann richtig bleiben, wenn die Formen nicht diametral, sondern ganz beliebig sind.

Man beachte zunächst, daß die in der sphärischen Trigonometrie betrachteten Invarianten $\sin L$, $\cos L$ u. s. w. nur von den Verhältnissen $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1$, $\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2$, $\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3$ der Coefficienten jeder der 3 Formen F_1, F_2, F_3 abhängen. Es sind also nicht sowohl Invarianten der Formen, als vielmehr der Gleichungen, welche durch 0 = Setzen der Formen sich ergeben.

Eine jede trigonometrische Relation 1. Stufe hat also die Gestalt:

$$A(\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 ; \alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2 ; \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3) = 0,$$

wobei A eine algebraische Function eines jeden Argumentes ist.

Bei unsern diametralen Formen ist

$$\alpha_1 = a_1 - i b_1 \,,\quad \beta_1 = 1 - a_1^2 - b_1^2 \,,\quad \gamma_1 = -a_1 - i b_1 \,,$$
$$\alpha_2 = a_2 - i b_2 \,,\quad \beta_2 = 1 - a_2^2 - b_2^2 \,,\quad \gamma_2 = -a_2 - i b_2 \,,$$
$$\alpha_3 = a_3 - i b_3 \,,\quad \beta_3 = 1 - a_3^2 - b_3^2 \,,\quad \gamma_3 = -a_3 - i b_3 \,,$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke mögen die Relationen die Form annehmen:

$$A'(a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; a_3, b_3) = 0.$$

Dabei ist A' eine algebraische Function eines jeden ihrer Argumente.

Diese Function soll nun für jedes Tripel diametraler quadratischer Formen, d. h. für alle beliebigen reellen Werte der $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ verschwinden, d. h. für alle reellen a, b identisch verschwinden.

Wenn nun aber A' für alle reellen Werte seiner Argumente identisch 0 ist, so muß es auch für alle complexen Werte der $a_1, b_1 ; a_2\, b_2 ; a_3\, b_3$ identisch verschwinden, nach einem bekannten Satze der Functionentheorie.

Denn, nehmen wir etwa für b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 beliebige feste reelle Werte an, und lassen nun a_1 alle reellen Werte durchlaufen, so bleibt A' immer $= 0$. Nun ist aber bei festen Werten von b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 die Function A' eine algebraische Function des einen veränderlichen Arguments a_1, das wir uns in einer Ebene gedeutet denken.

Dieselbe würde längs der ganzen reellen Axe der Ebene verschwinden. Eine algebraische Function aber, die überhaupt längs eines endlichen Linienstückes verschwindet, muß überhaupt in der ganzen complexen Zahlenebene verschwinden.
D. h. die Relation muß auch für alle complexen Werte von a_1 richtig bleiben. In derselben Weise ist der Gültigkeitsbereich der Relation auch auf die complexen Werte sämtlicher anderer Variablen auszudehnen.

Die Identitäten

$$A(a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3) = 0$$

gelten also nicht nur für alle diametralen quadratischen Formen, sondern überhaupt für alle Formen, welche sich mit reellen oder <u>complexen</u> Größen a, b in die Gestalt bringen lassen.

$$(a - ib)\,\eta_1^2 + (1 - a^2 - b^2)\,\eta_1\,\eta_2 - (a + ib)\,\eta_2^2.$$

Nun aber kommen in unsern Relationen nur die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ der Coefficienten der Formen vor, mit andern Worten, es handelt sich nur um quadratische Gleichungen, nicht eigentlich um Formen. Und da ist leicht zu sehen, daß die Gleichung:

$$(a - ib)\,\eta^2 + (1 - a^2 - b^2)\,\eta - (a + ib) = 0,$$

wenn man den a, b beliebige complexe Werte

gestattet, überhaupt die allgemeinste quadratische Gleichung ist.

Die specielle Formel, durch welche wir gestern die diametralen Gleichungen 2. Grades dargestellt haben, ist in Wirklichkeit die allgemeine Formel einer quadratischen Gleichung, sofern es nur als gestattet angesehen wird, a und b selbst als complex anzunehmen, während man auf diametrale Gleichungen beschränkt bleibt, wenn man a und b reell annimmt.

Da nun die Formeln der sphärischen Trigonometrie als Relationen zwischen den Invarianten dreier quadratischen Gleichungen angesehen nicht nur für reelle, sondern auch für alle complexen Werte von a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 ihre Gültigkeit behalten, so gelten sie nicht nur für drei diametrale quadratische Gleichungen, sondern für irgend drei ganz beliebige quadratische Gleichungen.

Der Gegenstand der sphärischen Trigonometrie erweitert sich also in folgender Weise:

Gegeben sind 3 beliebige quadratische Formen. Wir bilden uns die Functionaldeterminanten und mit deren Hülfe die 6 transcendenten Invarianten $L, M, N, \lambda, \mu, \nu$ und die 12 algebraischen Invarianten:

cos L, sin L; cos M, sin M; cos N, sin N; cos λ, sin λ; cos μ, sin μ; cos ν, sin ν. Dann bestehen zwischen diesen 12 Größen die Formeln der sphärischen Trigonometrie.

So haben wir für die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie ein sehr viel erweitertes Feld genommen, mit unbeschränkter complexer Veränderlichkeit der darin vorkommenden Größen. Wir werden nun rückwärts fragen, was diese algebraischen Relationen zwischen den Invarianten dreier beliebigen Formen geometrisch bedeuten? Was tritt da an Stelle unseres Dreikants? und was sind das für geometrische Stücke der Figur, die wir mit L, M, N, λ, μ, ν bezeichnen?

Deuten wir eine beliebige quadratische Form F_0 in derselben Weise geometrisch, wie früher eine diametrale quadratische Form, indem wir nämlich die beiden O-Punkte derselben auf der Kugel construiren und durch eine gerade Linie verbinden! Wir haben offenbar:

$F_1 = 0$ gibt uns eine gerade Linie, die aber kein Durchmesser zu sein braucht.

In derselben Weise deuten wir F_2 und F_3. An die Stelle der 3 im Mittelpunkt der Kugel sich schneidenden

Durchmesser sind nur 3 sich im Allgemeinen nicht schneidende das Innere der Kugel durchsetzende gerade Linien getreten. Dieses geometrische Gebilde wollen wir einen „allgemeinen dreigliedrigen Kern" nennen.

Die drei Functionaldeterminanten $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \varphi_3 = 0$ definiren uns in derselben Weise einen zum ersten in bestimmter Beziehung stehenden zweiten dreigliedrigen Kern, welchen wir den „Polarkern" des ersten nennen wollen. Welches ist dann die geometrische Beziehung des Polarkerns $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3$ zu dem gegebenen Kern F_1, F_2, F_3? Gewiß wird es eine gegenseitige Beziehung sein, da ja der Polarkern des Polarkernes wieder der ursprüngliche Kern sein muß. An dieser aus dem Kern und seinem Polarkern bestehenden geometrischen Figur werden wir dann die Stücke $L\ M\ N\ \lambda\ \mu\ \nu$ geometrisch zu interpretiren haben. –

Da wir es in ganz allgemeinem Sinne mit Invarianten und Covarianten zu thun haben, handelt es sich hierbei um solche Verhältnisse, die bei allen den ∞^6 Transformationen

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

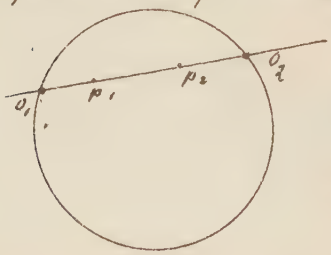
mit beliebigen complexen Werten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erhalten bleiben.

Das führt uns zu der sogenannten „Nicht-Euklidischen Geometrie," d. h. zu der Geometrie mit einer auf unsere η-Kugel als Fundamentalfläche gegründeten Cayley'schen (projectiven) Maßbestimmung. Die Nicht-Euklidische Geometrie ist nämlich einfach die Invariantentheorie derjenigen linearen Raumtransformationen, welche die Fundamentalfläche in sich selbst überführen, genau so wie die gewöhnliche Raumgeometrie die Invariantentheorie der ∞^6 gewöhnlichen Bewegungen des Raumes vorstellt. –

Wir werden also jetzt ganz allgemein einen kurzen Blick darauf zu werfen haben, wie sich die Geometrie gestaltet unter Benutzung der

Kugel als Fundamentalfläche einer Cayley'schen Maßbestimmung.

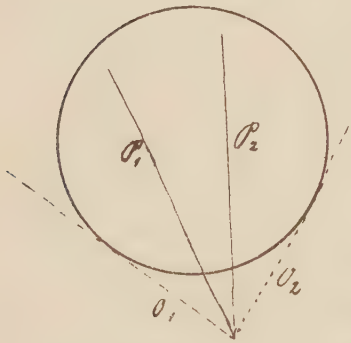
Ich werde davon hier nur das allernothwendigste mittheilen können, indem ich im Übrigen auf meine Vorlesung über Nichteuklidische Geometrie hinweise, und zwar, was Raumgeometrie anlangt, speciell auf den II. Teil des betr. Heftes.



Es seien irgend zwei Punkte p_1 p_2 gegeben. Um ihre „Entfernung" im Sinne der Cayley'schen Maßbestimmung zu definiren,

verbinden wir p_1 und p_2 durch eine gerade Linie, welche die Fundamentalfläche in zwei Punkten o_1 und o_2 schneiden möge. Unter der Entfernung p_1 und p_2 versteht man dann den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses von p_1, p_2 zu o_1, o_2

$$p_1 p_2 = \frac{i}{2} \log \left(\frac{p_1 o_1}{p_2 o_2} : \frac{p_1 o_2}{p_2 o_2} \right).$$



In dualistisch genau entsprechender Weise werden wir unter dem Winkel zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien sowie unter dem Winkel zweier sich schneidenden Ebenen den mit $\frac{i}{2}$ multiplicirten Logarithmus des Doppelverhältnisses verstehen, welches die beiden Geraden mit denjenigen Geraden desselben Büschels, bezw. die Ebenen mit denjenigen Ebenen desselben Büschels bilden, welche die Fundamentalfläche berühren:

$$\measuredangle P_1 P_2 = \frac{i}{2} \log \left(\frac{P_1 O_1}{P_2 O_1} : \frac{P_1 O_2}{P_2 O_2} \right).$$

Übrigens ist über die Beziehung dieser Definition des Winkels zu dem gewöhnlichen Begriff des Winkels folgendes zu sagen:

Den Logarithmus des Doppelverhältnisses können wir immer durch einen arccos ausdrücken, und es stimmt dann der Winkel zweier Geraden oder zweier Ebenen, die vom Mittelpunkt der Kugel ausgehen, genau überein mit den Winkeln, welche diese geraden Linien und Ebenen in der elementaren Geometrie mit einander bilden.

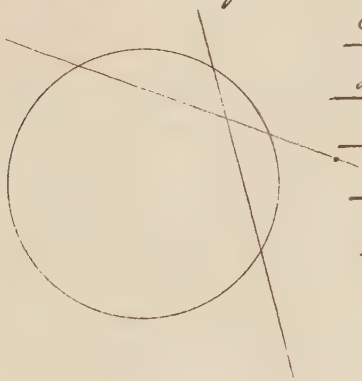
Es ist im Übrigen nützlich, zu discutiren, wann die Entfernungen und Winkel zweier Punkte, Geraden, Ebenen reell, wann imaginär sind. Man findet für die Entfernung bezw. den Winkel einen rein imaginären Wert (abgesehen vom Vielfachen von π), wenn die beiden Elemente O_1, O_2 resp. O_1, O_2 reell sind, dagegen einen reellen Wert, wenn O_1, O_2 resp. O_1, O_2 conjugirt complex sind, das Doppelverhältnis also den absoluten Wert 1 hat. Also

Die Entfernung zweier Punkte wird rein imaginär, wenn beide Punkte innerhalb der Kugel liegen, und der Winkel zweier sich schneidenden Geraden oder Ebenen wird reell, wenn sie sich innerhalb der Kugel schneiden.*)

Wir müssen nun wissen, wann zwei gerade Linien oder Ebenen aufeinander senkrecht stehen

*) Es sind dies diejenigen Möglichkeiten, die wir im Folgenden fast ausschließlich betrachten.

d.h. wenn sie einen Winkel $\frac{\pi}{2}$ miteinander bilden. Dann muß das Doppelverhältnis derselben zu den berührenden Elementen O_1 O_2 desselben Büschels $= -1$ sein, d.h. P_1, P_2 müßen zu O_1 O_2 harmonisch liegen. Das ergibt für die Ebene:



<u>Eine gerade Linie steht in der Ebene auf der zweiten senkrecht, wenn sie durch den Pol dieser zweiten Geraden geht.</u>

Dann geht natürlich auch die zweite Gerade durch den Pol der ersten Geraden, so daß die Beziehung des Senkrechtstehens, wie auch in der gewöhnlichen Geometrie, eine gegenseitige ist.

Im Raume gibt es zu jedem Punkt eine Polarebene, zu jeder Ebene einen Pol. Einer geraden Punktreihe entspricht als Polargebilde ein Ebenenbüschel und umgekehrt. Unter der conjugirten Polare einer Geraden versteht man eine andere Gerade, welche zu der ersten in der (gegenseitigen) Beziehung steht, daß einer auf der einen Geraden liegenden Punktreihe ein Ebenenbüschel mit der andern Geraden als

Ecke als Polargebilde entspricht. Und nun kann man sagen:

Eine gerade Linie steht auf einer zweiten senkrecht, wenn sie gleichzeitig diese zweite gerade Linie und die conjugirten Polare derselben schneidet.

Jetzt werden wir weiter fragen, ob man zu irgend zwei gegebenen geraden Linien ein gemeinsames Perpendikel construiren kann? Diese Frage kommt darauf hinaus, ob man eine Gerade construiren kann, welche einerseits durch die erste Gerade p_1 und ihre conjugirte Polare P_1, andererseits durch die andere Gerade p_2 und ihre conjugirte Polare P_2 geht, kurz, welche durch die 4 Geraden p_1, P_1, p_2, P_2 gleichzeitig geht?

Es gibt nun immer 2 gerade Linien, welche die Bedingung erfüllen, vier irgendwie gegebene gerade Linien zu schneiden. Im vorliegenden Fall sind dieselben beide reell und von einander verschieden, und zwar sind sie selbst einander polar zugeordnet:

Die 4 Geraden haben 2 gemeinsame Transversalen p' und P', welche zu einander wieder conjugirte Polaren in Bezug auf die Kugel sind.

Die eine dieser Geraden, p', schneidet die Kugel

nicht durchsetzt also das Innere derselben, die andere schneidet sie nicht, sondern verläuft ganz außerhalb der Kugel.

Da wir künftig nur auf das Innere der Kugel achten werden, werden wir sagen:

Das Innere der Kugel wird von nur einem gemeinsamen Perpendikel durchsetzt, und sofern wir nur auf das Innere der Kugel achten, ist also die Bestimmung des gemeinsamen Perpendikels zu zwei gegebenen geraden Linien etwas eindeutiges.

Do. 25. Jan. 94.

Heute haben wir noch eine kleine Entwicklung betreffend die Deutung einer beliebigen linearen Substitution

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

als eine nichteuklidische Bewegung des Raumes kennen zu lernen.

Da nämlich durch eine solche Substitution jeder Kreis auf der Kugel wieder in einen Kreis verwandelt, ein Kreis aber immer durch eine bestimmte Ebene ausgeschnitten wird, so kann man die Transformation

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

der Kugel in sich als eine solche Transformation des

ganzen Raumes auffassen, bei der die Kugel in sich selbst, und alle Ebenen wieder in Ebenen übergehen. Alle Kreise aber, welche einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden, gehen wegen der Conformität der Transformation auf der Kugel wieder in Kreise über, die einen gewissen Kreis orthogonal schneiden. Kreisen, die einen Kreis orthogonal schneiden, entsprechen nun Ebenen die durch einen Punkt, den Pol des Orthogonalkreises, gehen. Alle Ebenen, die durch einen Punkt gehen, geben also wieder Ebenen, die durch einen Punkt gehen; mit andern Worten, wir haben es mit einer Punkttransformation zu thun. Eine Punkttransformation des Raumes aber, bei der alle Ebenen wieder Ebenen werden, kann nur eine projective Transformation sein.

Bei einer projectiven Transformation des Raumes bleiben nun, wie man weiß alle Doppelverhältnisse ungeändert, hier also insbesondere alle auf die fest bleibende Kugel bezüglichen Doppelverhältnisse mit andern Worten, alle auf die Kugel gegründeten nichteuklidischen Maßbestimmungen. D. h.

Man kann jede projective Transformation

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

der Kugel in sich als eine nicht-euklidische Bewegung des gesammten Raumes auffassen.

Wir wollen jetzt den Charakter einer solchen Bewegung näher untersuchen.

Bei der vorliegenden Transformation bleiben zwei Punkte der Kugel, welche durch die Gleichung

$$\gamma\eta^2 + (\delta - \alpha)\eta - \beta = 0$$

bestimmt sind, ungeändert, und die durch sie bestimmte Raumgerade wird also in sich selbst verschoben.

Der nicht-euklidische Charakter dieser Bewegung wird nun sicher nicht geändert, wenn wir dieselbe durch eine geeignete andere Bewegung so transformiren, dass die Axe durch die beiden mit $\eta = 0$ und $\eta = \infty$ bezeichneten einander diametral gegenüberliegenden Kugelpunkte hindurch geht, d. h. wenn wir durch eine geeignete ebenfalls projective Transformation des η die vorliegende Substitution $\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$ so transformiren, dass ihre Fixpunkte gerade 0 und ∞ sind. Dann hat sie aber die Gestalt:

$$\eta' = \alpha\eta.$$

Für α wollen wir hier einen Exponentialausdruck $e^{i\pi\lambda}$ setzen, also

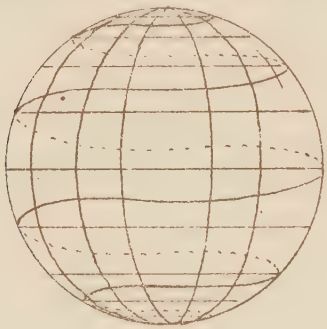
$$\eta' = e^{i\pi\lambda}\eta.$$

und wollen $\lambda\pi$ „Amplitude" der Bewegung nennen.

Wir können den analytischen Ausdruck der inneren Bewegung auf die Gestalt bringen

$$\eta' = e^{i\pi\lambda}\eta,$$

unter $\lambda\pi$ die Amplitude der Bewegung verstanden.



Die Zahl λ ist im Allgemeinen aus einem reellen und einem imaginären Teil zusammengesetzt

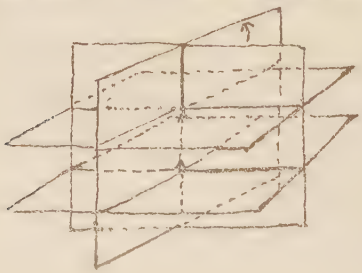
$$\lambda = \lambda' + i\lambda''.$$

Ich behaupte nun, beide Teile, der reelle wie der imaginäre, haben eine gute geometrische Bedeutung.

Bei der Transformation

$$\eta' = e^{i\pi\lambda}\eta$$

werden nämlich, wenn wir die Punkte 0 und ∞ im geographischen Sinne als Pole der Kugel ansehen, die Meridiane wieder Meridiane, die Breitenkreise wieder Breitenkreise, d. h. im Raume gedeutet: Die durch die Axe gehenden Ebenen



werden gedreht, die zur Axe senkrecht stehenden Ebenen parallel verschoben. Denkt man sich diese combinirte

Bewegung continuirlich ausgeführt und fortgesetzt, so beschreibt jeder Punkt des Raumes wie der Kugeloberfläche eine Art Schraubenbewegung von dem einen Pole der Kugel nach dem andern hin. Was haben nun der reelle und der imaginäre Teil der Amplitude $\lambda\pi$ für eine geometrische Bedeutung für diese Schraubenbewegung?

Da behaupte ich nun:

Ist $\lambda\pi = (\lambda' + i\lambda'')\pi$ die Amplitude der Bewegung, so werden die durch die Axe hindurchgehenden Ebenen, also die Ebenen der Meridiankreise, um den Winkel $\lambda'\pi$ gedreht, und die senkrecht zur Axe stehenden Ebenen, also die Ebenen der Breitenkreise, um das Stück $i\lambda''\pi$ auf der Axe gemessen verschoben.

Diese beiden Sätze sind zu beweisen. Die Substitution

$$\eta' = e^{i\lambda\pi}\eta$$

lautet, in Raumcoordinaten geschrieben:

$$\frac{x' + iy'}{1 - z'} = e^{+i\lambda'\pi - \lambda''\pi} \cdot \frac{x + iy}{1 - z}$$

Dieselbe Formel muß für die conjugirten Werte der Variablen und Constanten gelten, also

$$\frac{x' - iy'}{1 - z'} = e^{-i\lambda'\pi - \lambda''\pi} \cdot \frac{x - iy}{1 - z}.$$

Hieraus folgt durch Division der beiden Formeln

$$\frac{x'+iy'}{x'-iy'} = e^{2i\lambda'\pi} \cdot \frac{x+iy}{x-iy}$$

Setzt man nun

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z \text{ beliebig},$$

so bedeutet $\varphi = \text{const}$, bei variablem ρ und z eine der Meridianebenen. Bei dieser Bezeichnungsweise wird aber $x + iy = \rho e^{i\varphi}$, $x - iy = \rho \cdot e^{-i\varphi}$, und unsere Transformation schreibt sich

$$e^{2i\varphi'} = e^{2i\lambda'\pi} \cdot e^{2i\varphi},$$

oder

$$\varphi' = \varphi + \lambda'\pi.$$

Hieraus lesen wir ab, daß in der That, wie behauptet, die Meridianebene mit dem Azimut φ sich bei unserer Bewegung in die Meridianebene mit dem Azimut $\varphi + \lambda'\pi$ verwandelt, also eine Drehung um den Winkel $\lambda'\pi$ erfährt.

Multiplizieren wir andererseits die beiden Transformationsgleichungen, und berücksichtigen wir, daß für die Punkte der Kugel

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = 1 - z^2 = (1-z)(1+z)$$

ist, so ergibt sich

$$\frac{1+z'}{1-z'} = e^{-2\lambda''\pi} \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

und hieraus

$$\frac{z'-1}{z'+1} : \frac{z-1}{z+1} = e^{2\lambda''\pi}.$$

D. h: Das Doppelverhältniss des transformirten Punktes z' und des ursprünglichen Punktes z zu den Schnittpunkten $z = +1$ und $z = -1$ der Axe mit der Kugel ist gleich $e^{2\lambda''\pi}$ Nun ist aber die nichteuklidische Entfernung dieser zwei Punkte z und z' durch den mit $\frac{1}{2}$ multiplicirten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses definirt

$$zz' = \frac{i}{2} \log D V$$

Also ergibt sich wirklich als nicht-euklidische Entfernung des transformirten Punktes der Axe von dem ursprünglichen, d. h. als Betrag der Verschiebung der Wert

$$zz' = i\lambda''\pi. -$$

Diese beiden Resultate, betreffs der Drehung und der Schiebung, zusammengefasst mögen noch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Eine Schraubenbewegung von der Amplitude $\lambda\pi$, wo $\lambda = \lambda' + i\pi''$ ist, bedeutet eine Drehung um die Schraubenaxe durch den Winkel $\lambda'\pi$ und eine Verschiebung längs der Schraubenaxe um das Stück $i\lambda''\pi$.

Nach diesen Vorbereitungen werden wir leicht

die Schliessung ähnlicher Figur verstehen.

Drei Formen F_1, F_2, F_3 bedeuten drei Geraden im Raume; die sich im Allgemeinen nicht schneiden also zu einander windschief liegen.

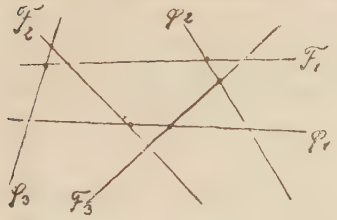
Dazu bilden wir die Functionaldeterminanten φ_1, φ_2, φ_3 welche wieder durch drei Geraden repräsentirt werden, durch den „Polarkern" des durch F_1 F_2 F_3 gegebenen Kerns. Wie liegt nun dieser Polarkern zu dem ursprünglichen Kern?

Um das zu sehen, müssen wir überhaupt untersuchen, welches die geometrische Beziehung der Functionaldeterminante φ_1 zu den beiden Formen F_2, F_3 ist. Ich behaupte, um es weiter vorn zu beweisen

Die Functionaldeterminante zweier quadratischen Formen wird durch das gemeinsame Perpendikel derjenigen beiden Geraden gegeben, welche die Repräsentanten der beiden quadratischen Formen sind.

Nehmen wir vorläufig diesen Satz als bewiesen an; so ist klar, daß, wenn die Kanten des Polarkerns die gemeinsamen Perpendikel je zweier Kanten des ursprünglichen Kerns sind, daß dann auch umgekehrt die Kanten des ursprünglichen Kerns die gemeinsamen Perpendikel der Kanten

des Polarkerns sind.



Kern und Polarkern bilden zusammen einen Doppelkern, d. h. ein räumliches Sechsseit, dessen einzelne Seiten auf der vorangehenden und nachfolgenden jedesmal rechtwinklig stehen.

Was haben nun die durch die Invarianten der Formen F_1, F_2, F_3, und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ definirten Größen $\lambda\pi$ $\mu\pi$ $\nu\pi$, $L\pi$ $M\pi$ $N\pi$ für eine geometrische Bedeutung in Bezug auf diesen Doppelkern?

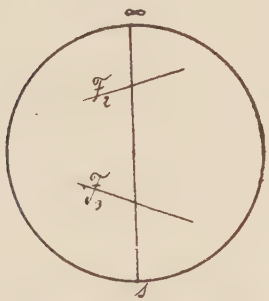
Ich behaupte, daß $\lambda\pi$ die Amplitude derjenigen Schraubenbewegung ist, welche ich um F_1 herum als Axe vornehmen muß, um φ_2 in φ_3 überzuführen; d. h. daß $\lambda'\pi$ der Winkel ist, den die beiden durch F_1 hindurchgehenden Ebenen miteinander bilden, welche φ_2 bezw. φ_3 enthalten, und daß $i\lambda''\pi$ die Entfernung der Fußpunkte von φ_2 und φ_3 auf F_1 ist.

Genau entsprechende Bedeutung haben $\mu\pi$, $\nu\pi$ und wenn man Kern und Polarkern vertauscht, $L\pi$, $M\pi$, $N\pi$.

All diese Sätze hängen in erster Linie von dem

Beweise des Satzes ab, dass die Functionaldeterminante φ_1 zweier Formen F_2, F_3 geometrisch das gemeinsame Perpendikel der F_1 und F_2 repräsentirenden Geraden vorstellt.

Um das zu beweisen, führen wir eine möglichst bequeme Lage der Figur zum Coordinatensystem ein:



Wir legen dieselbe nämlich so, dass das gemeinsame Perpendikel von F_2 und F_3 durch die Punkte 0 und ∞ der Kugel geht, dass also die Geraden F_2 und F_3 jede in einer horizontalen Ebene liegen. F_2 und F_3 haben dann die Gestalt

$$F_2 = \alpha_2 \eta_1^2 + \gamma_2 \eta_2^2,$$
$$F_3 = \alpha_3 \eta_1^2 + \gamma_3 \eta_2^2.$$

Die Functionaldeterminante dieser beiden Formen lautet aber:

$$\varphi_1 = 4(\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2) \cdot \eta_1 \eta_2,$$

hat also die Nullpunkte 0 und ∞, ihre repräsentirende Gerade fällt also in der That mit dem

gemeinsamen Perpendikel der Geraden F_2 und F_3 zusammen.

Damit ist gezeigt, dass die Functionaldeterminante zweier Formen wirklich durch das gemeinsame Perpendikel der die Formen repräsentirenden beiden Geraden vorgestellt ist.

Zweitens ist jetzt zu beweisen, dass die Schraubenbewegung mit der Axe φ_1, welche F_2 in F_3 überführt, wirklich die durch:

$$\cos \mathcal{L}\pi = \frac{D_{23}}{\sqrt{D_{22}}\sqrt{D_{33}}}, \quad \sin \mathcal{L}\pi = \frac{\frac{i}{2}\sqrt{\Delta_{11}}}{\sqrt{D_{22}}\sqrt{D_{33}}}$$

gegebene Amplitude $\mathcal{L}\pi$ besitzt.

Die Schraubenbewegung mit der Axe φ_1 wird die Gestalt haben: $\eta' = e^{i\pi\mathcal{L}}\eta$.

Damit die Gleichung

$$F_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_2 \eta^2 + \beta_2 = 0$$

durch diese Transformation in die Gleichung

$$F_3 = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha_3 \eta^2 + \beta_3 = 0$$

übergehe, muss

$$\alpha_2 \cdot e^{2i\pi\mathcal{L}} : \beta_2 = \alpha_3 : \beta_3,$$

also

$$e^{2i\pi\mathcal{L}} = \frac{\alpha_3 \beta_2}{\alpha_2 \beta_3},$$

also

$$\cos \mathcal{L}\pi + i \sin \mathcal{L}\pi = \sqrt{\frac{\alpha_3 \beta_2}{\alpha_2 \beta_3}}$$

sein.

Das so definirte $\mathcal{L}$ ist nun in der That das frühere:

In der That rechnet man nach, daß

$$\cos \mathcal{L}\pi = \frac{\mathfrak{F}_{23}}{\sqrt{\mathfrak{D}_{22}}\sqrt{\mathfrak{D}_{33}}} = \frac{\alpha_2 \gamma_3 + \alpha_3 \gamma_2}{2\sqrt{\alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3}}$$

und $\sin \mathcal{L}\pi = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{11}}}{\sqrt{\mathfrak{D}_{22}}\sqrt{\mathfrak{D}_{33}}} = i \cdot \frac{\alpha_2 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_2}{2\sqrt{\alpha_2 \alpha_3 \gamma_2 \gamma_3}}$

ist, also

$$\cos \mathcal{L}\pi + i \sin \mathcal{L}\pi = \frac{\mathfrak{D}_{23} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta_{11}}}{\sqrt{\mathfrak{D}_{22}}\sqrt{\mathfrak{D}_{33}}} = \sqrt{\frac{\alpha_3 \gamma_2}{\alpha_2 \gamma_3}},$$

womit auch der zweite Teil der Behauptung bestätigt ist.

Wir haben gezeigt, daß der Winkel $\mathcal{L}\pi$, welcher in analytischer Form durch die Invarianten $\mathfrak{D}$ und Δ definirt wird, direct die Amplitude derjenigen Schraubenbewegung ist, die man um das gemeinsame Perpendikel eintreten lassen muß, damit die Gerade $\mathfrak{F}_2$ in die Gerade $\mathfrak{F}_3$ übergeht.

Wir sehen also aus dem allen:

Die Schilling'sche Figur ist in der That die richtige und nothwendige Verallgemeinerung des Dreikants und seines Polardreikants, welche man eintreten lassen muß, wenn man $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, λ, μ, ν als complexe Größen betrachten will.

Wir sagen heute noch kurz: [Fr. d. 26. Jan. 94.]

Die Entwicklungen der gestrigen Stunde kommen in der Hauptsache darauf zurück, daß man den Winkel zweier sich nicht schneidenden Geraden durch die Amplitude derjenigen Schraubenbewegung erklärt, welche man um das gemeinsame Perpendikel der beiden Geraden ausführen muß, um die eine Gerade in die andere überzuführen, und daß man von vornherein diese Definition bei der Figur des Doppelkerns in Anwendung bringt.

Wir knüpfen nun heute an die schon früher gemachte Bemerkung an, daß durch den Kern, bezw. durch die drei Formen $\mathfrak{F}_1$ $\mathfrak{F}_2$ $\mathfrak{F}_3$ die 6 Winkel λ μ ν L M N nicht eindeutig definirt sind.

Schon beim gewöhnlichen Dreikant hatten wir je nach dem Sinn, in dem die Winkel und Seiten gemessen wurden, 64 Stämme von zugehörigen Dreiecken zu unterscheiden, und in jedem dieser Stämme noch unendlich viele verschiedene Dreiecke, deren Winkel und Seiten sich um beliebige Multipla von 2π unterscheiden. Dabei ergaben sich aus irgend einem der unendlich vielen zu demselben Dreikant gehörigen Dreiecke mit den Winkeln und Seiten $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, $L\pi$, $M\pi$, $N\pi$

alle übrigen durch die Formeln auf Seite 306.

Ganz entsprechend sind beim allgemeinen Kern je nach der Vorzeichenwahl für die in $\cos \lambda\pi$ $\sin \lambda\pi$ u. s. w. auftretenden 6 Irrationalitäten $2^6 = 64$ Stämme von Wertsystemen $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ zu unterscheiden, wobei die Wertsysteme je eines Stammes sich noch um beliebige Multipla von 2π unterscheiden. Wir verabreden in dieser Hinsicht:

Wenn wir an der Figur nichts anderes, als die Lage der 2 mal 3 Linien des Kerns und des Polarkerns als wesentlich ansehen, wollen wir den Kern einen „geometrischen Kern" nennen. Treffen wir außerdem noch eine Festsetzung über den Sinn der Bewegungen, ohne aber modulo 2π verschiedene Amplituden voneinander zu unterscheiden, verallgemeinern wir also die Möbiusche Definition des sphärischen Dreiecks, so werden wir das so schärfer definirte Gebilde einen „algebraischen Kern 1. Stufe" nennen, und wenn wir endlich die Amplituden ihrem absoluten Werte nach festsetzen, werden wir von einem „transcendenten Kern" sprechen. Diese Verabredungen sollen übrigens nur für unsere augenblicklichen Betrachtungen gelten, ohne daß wir denselben eine bleibende Bedeutung für alle Zukunft geben wollten.

Wie in der Trigonometrie mit reellen Winkeln und Seiten bietet sich uns jetzt hier das Problem, zu einem gegebenen geometrischen Kern alle zugehörigen transcendenten Kerne zu gewinnen. Zu dem Zwecke müssen wir einige Festsetzungen treffen:

1.) Wir statten jede der 6 Geraden des Doppelkerns mit einem bestimmten positiven Durchlaufungssinn aus.

2.) Unter einer positiven Schraubung (mit positivem reellen und imaginären Teil der Amplitude) verstehen wir eine rechtsgewundene Schraubenbewegung in dem eben festgelegten positiven Sinne der Schraubenaxe.

3.) Unter $\Delta\pi$ verstehen wir dann den in positivem Sinne gerechneten Betrag derjenigen rechtsgewundenen Schraubung um P_1, welche die positive Richtung von F_2 in die positive Richtung von F_3 überführt. Entsprechend definieren wir die übrigen Amplituden.

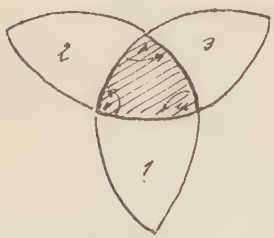
Durch all das sind die Amplituden aber erst modulo 2π bestimmt; unter allen bei dieser Bestimmungsweise noch möglichen Werten der $\Delta\pi$ $M\pi$ $N\pi$; $\lambda\pi$, $\mu\pi$ $\nu\pi$ sei ein bestimmtes Wertsystem ausgewählt. Wir haben offenbar:

Die Festsetzungen 1) können auf 64 Weisen getroffen werden, und es sind dann durch 2) und 3) die $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi, \lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ bis auf beliebige Multipla von 2π bestimmt, so daß wir gerade die 64 Stämme verwandter transcendenter Kerne vor uns sehen.

Nachdem wir so den Begriff des transcendenten Kerns festgelegt haben, werden wir sagen: die so definirten Wertsysteme sind der Gegenstand der erweiterten sphärischen Trigonometrie. In der That stimmen unsere Festsetzungen über die Vorzeichen und absoluten Werte der $\lambda\ \mu\ \nu\ \ldots$, wenn wir zum Dreikant zurückgehen, mit den früher getroffenen genau überein.

Zum Schluß dieser trigonometrischen Betrachtungen will ich noch eine kinematische Ergänzung hinzufügen; ich meine

Hamilton's Satz vom sphärischen Dreieck.



Denken wir uns auf der Kugel ein gewöhnliches sphärisches Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$. Denken wir uns nun erstens die ganze Kugel um den durch $\lambda\pi$ gehenden Durchmesser um den Winkel $2\lambda\pi$ gedreht, und nennen diese Operation A. Desgleichen verstehen wir unter B eine Drehung der Kugel um den durch

$u\pi$ gehenden Durchmesser um den Winkel $2u\pi$, unter C eine Drehung um $2v\pi$ um den durch die dritte Ecke gehenden Durchmesser. Dann behauptet Hamilton:

Die Aufeinanderfolge dieser drei Operationen ergibt die Identität:

$$A\,B\,C = 1.$$

In der That sehen wir, wenn wir zu dem gegebenen Dreieck die Spiegelbilder an den drei Seiten bilden, wie es in der Figur der vorigen Seite geschehen ist, daß die Operation A das Dreieck (2) in das Dreieck (3) überführt, daß dann das Dreieck (3) durch die Operation B in (1) übergeht, und daß endlich die Operation C das Dreieck (1) wieder in (2) transformirt. Die Aufeinanderfolge ABC der drei Operationen führt also (2) in sich selbst über, muß also, da sie einen endlichen Teil der Kugel ungeändert läßt, auch die ganze Kugel in sich überführen, d. h. die Identität sein.

Hamilton beweist seinen Satz in der hiermit dargelegten Weise durch die Betrachtung der symmetrischen Nebendreiecke, indem er bemerkt, daß immer eines dieser Dreiecke aus dem andern

durch die Drehung A oder B oder C hervorgeht.

Wir können wesentlich dieselbe Überlegung auch etwas anders, mehr formelmäßig, darstellen. Wir wollen die Spiegelung an der Seite $\mu\,\nu$ mit A, die Spiegelung an $\nu\lambda$ mit B, diejenige an $\lambda\,\mu$ mit T bezeichnen. Spiegeln wir nun das gegebene Dreieck erst an der Seite $\nu\,\lambda$, so bekommen wir (2); wenden wir dann die Drehung A an, so geht (2) in (3) über. Dasselbe Dreieck (3) können wir aber auch direct durch Spiegelung an $\lambda\,\mu$ erhalten: d. h. die Aufeinanderfolge der beiden Operationen B und A hat denselben Erfolg, wie die Operation T, oder

$$BA = T$$

Hieraus $\quad BBA = BT$, und wegen $BB = 1$

$$A = BT.$$

In derselben Weise, wie hier die Drehung A, lassen sich auch B und C als Combination je zweier Spiegelungen darstellen:

$$A = BT, \quad B = TA, \quad C = AB$$

Setzen wir nun A, B, C, zusammen, bilden also:

$$ABC = BTTAAB,$$

so ist $TT = 1$, $AA = 1$, und das übrig bleibende $BB = 1$, also

$$ABC = 1, \text{ w. z. b. w.}$$

Hamilton beweist seinen Satz im Grunde dadurch, daß er $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ aus den Spiegelungen A, B, T zusammengesetzt, wo dann

$$\mathcal{A} = BT, \quad \mathcal{B} = TA, \quad \mathcal{C} = AB$$

wird, und nur noch der Umstand zu benutzen ist, daß $A^2 = 1$, $B^2 = 1$, $T^2 = 1$ ist.

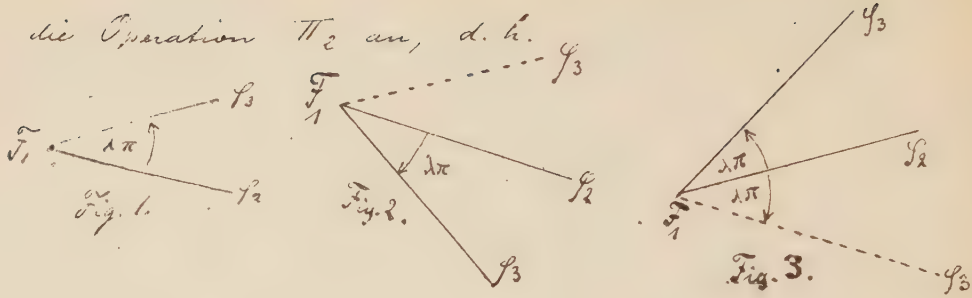
Bei dem hiermit geschilderten Verfahren läßt sich der Beweis des Satzes nicht gut für den allgemeinen Kern aus windschiefen Geraden verallgemeinern.

Einer solchen Verallgemeinerung fähig wird der Beweis aber durch eine glückliche Modification, welche Schilling an demselben angebracht hat.

Schilling fügt nämlich zu den drei Axen $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \mathfrak{T}_3$ der Drehungen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ noch die Axen des Polarkerns zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und führt dann statt der Hamilton'schen Spiegelungen der Kugel Umklappungen des Raumes um die Axen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ d.h. Drehungen um $180°$, ein.

Dieselben mögen Π_1, Π_2, Π_3 heißen. Denken wir uns etwa die Axe $\mathfrak{T}_1$ senkrecht zur Zeichenebene, so werden die beiden Axen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ des Polarkerns in der Zeichenebene selbst liegen und den Winkel $\lambda\pi$ miteinander bilden (Fig. 1). Wenden wir nun

die Operation Π_2 an, d. h.



Klappen wir die ganze Figur um die Gerade $\mathfrak{S}_3$ um, so wird die Figur 2 entstehen, in der aber $\mathfrak{F}_1$, wenn seine positive Richtung in Fig 1 nach oben zu denken war, nach unten gerichtet ist. Klappen wir nun diese Figur noch einmal um die (in Fig. 2 punktirte) Axe $\mathfrak{S}_3$ um, wenden wir also die Operation Π_3 an, so entsteht Fig 3, in der $\mathfrak{F}_1$ wieder wie in Fig. 1 aufrecht gerichtet ist, und die Ebene der Geraden $\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_3$ um den Winkel $2\lambda\pi$ gegen die Lage in Fig 1 um die Axe $\mathfrak{F}_1$ gedreht erscheint, d. h. es ist

$$A = \Pi_2\ \Pi_3$$

Ebenso ergibt sich $B = \Pi_3\ \Pi_1$

und $C = \Pi_1\ \Pi_2$

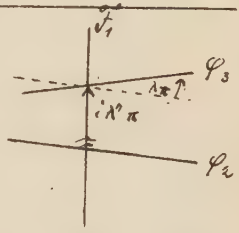
Da nun wieder, wie bei den Spiegelungen

$$\Pi_1^2 = \Pi_2^2 = \Pi_3^2 = 1$$

ist, so folgt aus dieser Darstellung der A, B, C genau wie früher:

$$A\,B\,C = 1.$$ Wir recapituliren:

In der That ist es elementargeometrisch vollkommen klar, daß die Drehungen A, B, C mit den doppelten Amplituden $2\lambda\pi$, $2\nu\pi$ je eine Aufeinanderfolge zweier Umklappungen $\Pi_2\,\Pi_3$, $\Pi_3\,\Pi_1$, $\Pi_1\,\Pi_2$ sind, und daß infolgedessen $ABC = 1$ ist.



Sehen wir nun zu, ob sich das Hölling'sche Verfahren auf den allgemeinen Fall übertragen läßt, wo λ eine complexe Größe $\lambda' + i\lambda''$ ist, wo also die beiden Geraden φ_2 und φ_3 nicht in demselben Punkte die Gerade $\mathfrak{F}_1$ schneiden, sondern auf dieser die Entfernung $i\lambda''\pi$ voneinander besitzen. Klappen wir hier einmal um φ_2, dann um φ_3 um, so geht schließlich $\mathfrak{F}_1$ auch wieder in $\mathfrak{F}_1$ mit demselben Richtungssinn über. Die Projektion auf die zur Axe $\mathfrak{F}_1$ senkrechte Ebene ändert sich dabei ebenso wie in den Figuren der vorigen Seite, d.h. die Gesamtbewegung enthält eine Drehung $2\lambda'\pi$. Die Strecke zwischen den Fußpunkten von φ_2 und φ_3 aber erscheint nach der zweimaligen Umklappung um ihre doppelte Länge $2i\lambda''\pi$ in positivem Sinne verschoben. Der Verschiebungsbestandtheil der Gesamtbewegung ist also $2i\lambda''\pi$

Die ganze Amplitude der Bewegung ist also $2\lambda'\pi + 2i\lambda''\pi = 2\lambda\pi$; d.h. es ist auch für complexe λ:

$$A = \Pi_2 \Pi_3,$$

und ebenso $$B = \Pi_3 \Pi_1,$$

$$C = \Pi_1 \Pi_2;$$

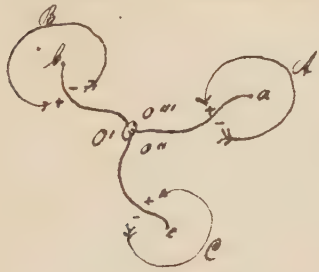
Im allgemeinen Falle der Schilling'schen Figur gibt die Aufeinanderfolge der Umklappungen Π_2, Π_3 eine Schraubenbewegung um T_1 von der Amplitude $2\lambda\pi$, welche wir A nennen. So wird den drei Axen je eine Schraubenbewegung von der Amplitude $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ zugeordnet. Wir dürfen dann sagen: auch für diese Schraubenbewegungen gilt der Satz $ABC = 1$.

Hiermit will ich nun diesen geometrischen Excurs schließen, um in der nächsten Stunde wieder zur functionentheoretischen Untersuchung der η-Function zurückzukehren.

[Mo. d. 29 Jan 94]

In der x-Ebene besitzt die η-Function drei singuläre Punkte a, b, c. Um einen einzelnen Zweig der Funktion zu isoliren, wählen wir irgend einen ganz beliebigen Punkt O der x-Ebene aus, und ziehen von ihm aus, wie in nebenstehender

Figur, drei vorläufig ganz beliebig gestaltete, nur einander nicht überkreuzende Einschnitte nach den



Punkten a, b, c, und bezeichnen deren rechte (von O aus gesehen) Ufer mit –, die linken Ufer mit +. Wir behalten uns übrigens vor, wenn es uns zweckmäßig erscheint, den Punkt O in einen der drei singulären Punkte selbst rücken zu lassen; dabei sparen wir einen der drei Einschnitte ein, es geht dafür aber die Symmetrie der Betrachtung verloren, weswegen wir im Allgemeinen den Punkt O einen gewöhnlichen Punkt der Ebene sein lassen. Die drei um O herumliegenden Winkelräume, welche von den Einschnitten O b, O c bezw. von Oc Oa und von Oa Ob gebildet werden, sollen O' O'' O''' heißen

In der so zerschnittenen x-Ebene ist der Quotient $\eta = \frac{P_1'}{P_2}$ eindeutig, doch so, daß er längs der Einschnitte an den negativen und positiven Ufern verschiedene Werte annimmt, welche durch je eine für den Schnitt charakteristische lineare Substitution zusammenhängen, so daß man hat:

längs Oa $\qquad \eta_+ = (\eta_-) \cdot A$,
" Ob $\qquad \eta_+ = (\eta_-) \cdot B$,
" Oc $\qquad \eta_+ = (\eta_-) \cdot C$,

unter A, B, C die beth. linearen Substitutionen verstanden.

Wenden wir auf den Punkt O, insofern wir ihn als Scheitel des Winkelraumes O'' auschen, die Substitution A an, so geht er in den Scheitel des Winkelraumes O''' über, dieser durch B in den Scheitel von O', dieser durch C wieder in den Scheitel des ursprünglichen Winkelraums O''; d.h. da η in der geschnittenen Ebene eindeutig sein soll, η geht durch die Aufeinanderfolge der Substitutionen $A\,B\,C$ in sich selbst über; und dies gilt für jeden beliebigen Wert von η in unserer Ebene, da ja O ein beliebiger Punkt ist, und von dessen Auswahl die Substitutionen A, B, C unabhängig sind; d.h. es muß identisch

$$A\,B\,C = 1$$

sein (wie wir dies Alles von früher her wissen).

Jede einzelne der Substitutionen A, B, C läßt sich im allgemeinen in die Gestalt setzen:

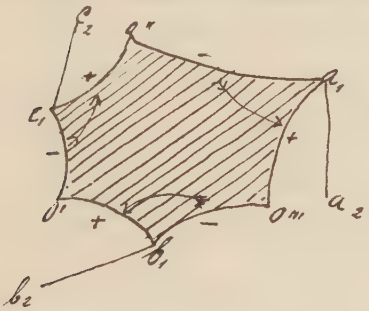
$$A)\ \frac{\eta' - a_1}{\eta' - a_2} = e^{2i\pi\lambda} \cdot \frac{\eta - a_1}{\eta - a_2},$$

$$B)\ \frac{\eta' - b_1}{\eta' - b_2} = e^{2i\pi\mu} \cdot \frac{\eta - b_1}{\eta - b_2},$$

$$C)\ \frac{\eta' - c_1}{\eta' - c_2} = e^{2i\pi\nu} \cdot \frac{\eta - c_1}{\eta - c_2}.$$

unter a_1, b_1, c_1 den Wert unseres Zweiges η in a, b, c verstanden; a_2 b_2 c_2 sind drei geeignete zugeordnete Werthe.

Unserer zerschnittenen x-Ebene entspricht nun auf der η-Kugel ein gewisser von 6 Kanten begrenzter Bereich, von welchen 3 Ecken a_1 b_1 c_1 je den Punkten a b c der x-Ebene entsprechen, während die dazwischen liegenden Ecken $0'$, $0''$, $0'''$ dem einen Punkte 0 entsprechen, je nachdem wir denselben als Scheitel des Winkelraumes $0'$ $0''$ $0'''$ der x-Ebene ansehen. Übrigens braucht der Bereich durchaus



nicht schlicht auf der η-Kugel ausgebreitet zu sein, sondern er kann, da die Winkel desselben in den a_1 b_1 c_1 sich mehrfach herumwinden können, die η Kugel sehr wohl mehrfach überdecken. Wesentlich ist aber die lineare Zuordnung der beiden von a_1, bezw. der beiden von b_1 resp. von c_1 auslaufenden Kanten.

Die Kanten sollen den beiden Ufern des einzelnen Querschnitts entsprechen. Eben deswegen gehören sie paarweise durch die Substitutionen A, B, C zusammen, ebensowie die beiden Ufer der Querschnitte durch A, B, C verbunden sind.

Den so beschriebenen Bereich der η-Kugel wollen wir, in Anlehnung an den Ausdruck „Periodenparallelogramm" der Theorie der elliptischen Functionen, als „Periodicitätsbereich" der η-Function bezeichnen, die Substitutionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ als „Periodicitätssubstitutionen". Die Punkte a, b, c sollen die „wesentlichen Ecken" des Bereichs heißen; denn sie entsprechen den singulären Punkten a, b, c der x-Ebene, und in ihnen tritt die Abbildung auf, conform zu sein, indem der Winkel an der betr. Ecke des Periodicitätsbereichs der ganzen Umgebung 2π des singulären Punkts entspricht. Dagegen die Ecken O', O'', O''' seien als „zufällige Ecken" benannt, da sie nur dem zufällig ausgewählten Punkte O der x-Ebene entsprechen. Da dieser keinerlei singulären Character für die Function besitzt, so ist auch die Abbildung an den Ecken O', O'', O''' conform, die Winkel sind also gleich den entsprechenden 3 in O zusammenstoßenden Winkeln der x-Ebene. Insbesondere folgt hieraus daß die Summe der Winkel an den Ecken $O'.O''O'''$ des Periodicitätsbereichs $= 2\pi$ ist. –

Wir wollen nun auf die geometrische Bedeutung der Periodicitätssubstitutionen, und damit auf den Zusammenhang unseres Periodicitätsbereichs mit den

von uns angestellten Betrachtungen über die sphärische Trigonometrie näher eingehen.

Die Ecken a_1, b_1, c_1 entsprechen den singulären Punkten a, b, c und die Substitutionen $A\ B\ C$ geben drei Schraubenbewegungen (oder Drehungen), durch welche die beiden von $a_1\ b_1\ c_1$ auslaufenden Kanten beziehungsweise zur Deckung gebracht werden.

Die Axen dieser drei Schraubenbewegungen sind durch die Fixpunkte $a_1\ a_2$; $b_1\ b_2$; $c_1\ c_2$ bestimmt. (S. Fig. v. S. 361 eingezeichnet.)

Die Amplitude der Schraubenbewegung A ist $2\lambda\pi = 2\lambda'\pi + i\,2\lambda''\pi$. Der Drehungsanteil der Amplitude ist hiernach $2\lambda'\pi$; d.h. eine durch $a_1\ a_2$ gehende Ebene wird um diesen Winkel gedreht; da aber zwei Ebenen, die irgend einen nichteuklidischen Winkel bilden, auf der Kugel zwei Kreise liefern, die sich unter demselben Winkel, euklidisch gemessen, schneiden, so folgt hieraus:

Der reelle Bestandteil der Amplitude von A teilt uns in dem Winkel entgegen, welchen die beiden von a_1 auslaufenden Kanten miteinander bilden.

Im Übrigen erscheint die Amplitude der Schraubenbewegung in unserer Figur dadurch vollkommen

festgelegt, daß vermöge A der Punkt O'' in O''' übergehen muß.

Den Inbegriff der drei Schraubenaxen bezeichne ich im Sinne der vorigen Stunde als den „geometrischen Kern" unseres Bereichs und in diesem dreigliedrigen Kern ist dann unser Periodicitätsbereich „eingehängt"

Wir wollen zuerst sehen, ob wir uns den Kern ganz klar geometrisch definiren können. Die Gerade $a_1 a_2$ wollen wir $\mathfrak{F}_1$, die Gerade $b_1 b_2$ $\mathfrak{F}_2$, $c_1 c_2$ $\mathfrak{F}_3$ nennen:

$$(a_1 a_2) = \mathfrak{F}_1 \quad (b_1 b_2) = \mathfrak{F}_2 \quad (c_1 c_2) = \mathfrak{F}_3 .$$

Dazu bilden wir uns die Perpendikel $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$.

Betrachten wir nun die complexen Winkel

$$\measuredangle(\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3), \quad \measuredangle(\mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_1), \quad \measuredangle(\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2),$$

d. h. die Amplituden der Schraubenbewegungen, welche $\mathfrak{p}_2$ in $\mathfrak{p}_3$ u. s. w. überführen, so werden dieselben, wie ich behaupte, geradezu $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sein.

Geometrisch ist der Kern der drei Schraubenaxen dadurch definirt, daß die Winkel, welche von den gemeinsamen Perpendikeln $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ gebildet werden, bei geeigneter Auswahl der Vorzeichen und der absoluten Werte geradezu durch $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ gegeben sind, unter λ, μ, ν die Exponentendifferenzen der η-Function oder der Riemann'schen $\mathfrak{P}$-Function verstanden.

Der Beweis mag davon ausgehen, daß die Schraubenbewegungen A, B, C, mit den Amplituden $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ hintereinander angewendet die Identität ergeben. Damit kennen wir die doppelten Amplituden des Kerns, und die Frage ist, wie weit der geometrische Kern durch diese Doppelamplituden festgelegt ist.

Seien $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ die Amplituden eines einzelnen Kerns. Dann sind nach unseren früheren Betrachtungen die Amplituden aller zum selben geometrischen Kern gehörigen transcendenten Kerne in der Gestalt enthalten:

$$\lambda' = \pm\lambda + P,$$

$$\mu' = \pm\mu + \Sigma,$$

$$\nu' = \pm\nu + T,$$

wobei aber $P + \Sigma + T \equiv 0 \pmod 2$ sein muß.

Durch unsere Substitutionen $A\,B\,C$ sind aber die Doppelamplituden $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ erst $(\mathrm{mod}\ 2\pi)$ bestimmt, so daß in den Amplituden selbst die Zahlen P, Σ, T zunächst noch ganz willkürlich wären; sie mögen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ heißen. Je nachdem man dann $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \equiv 0 \pmod 2$ oder $\equiv 1 \pmod 2$ annimmt, erhält man also zwei verschiedene Kerne, d. h. zwei verschiedene Systeme verwandter Funktionen, die zu denselben Doppel-

Amplituden 2λ, 2μ, 2ν gehören.

Durch die Amplituden $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ sind noch zwei Kerne festgelegt, der eine Kern, bei welchem sich die Winkel $\lambda' = \lambda_0$, $\mu' = \mu_0$, $\nu' = \nu_0$ finden, und der andere, bei welchem beispielsweise die Winkel $\lambda' = \lambda_0 + 1$, $\mu' = \mu_0 + 1$, $\nu' = \nu_0 + 1$ vorkommen.

Da behaupte ich nun, daß von diesen beiden Kernen der erste in Betracht kommt:

Es ist zu zeigen, daß bei unserm Periodicitätsbereich der erste der beiden Kerne in Betracht kommt und nicht der zweite.

Der Beweis wird aus den späteren Entwicklungen folgen, wo sich die Behauptung zuerst für reelle λ, μ, ν, ergibt und von da aus wegen der Continuität allgemein gilt.

Des Weiteren gestaltet sich die Sache so: Dem ersten Kern entsprechen P-functionen ohne Nebenpunkte, allgemein P-Functionen mit einer geraden Anzahl von Nebenpunkten und den Exponentendifferenzen λ, μ, ν, dem andern Kern aber entsprechen diejenigen P-Functionen mit den Exponentendifferenzen λ, μ, ν, welche eine ungerade Anzahl von Nebenpunkten besitzen, und unter diesen ist natürlich keine gewöhnliche P-Function, welche die Expo-

nentendifferenzen λ, μ, ν besäße, wohl aber die gew. P-Function mit den Exponentendifferenzen $\lambda+1, \mu+1, \nu+1$.

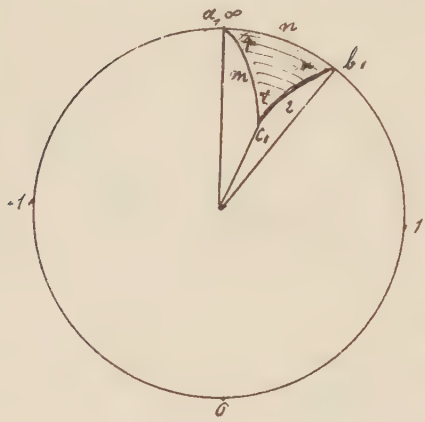
D.: d. 30. Jan. 94.

Das Resultat der gestrigen Stunde war, daß ein notwendiger Zusammenhang zwischen der Theorie der η-Function und der sphärischen Trigonometrie besteht. Die wollen wir heute noch etwas näher ausführen.

Ich will nämlich die expliciten Formeln für die drei Substitutionen A, B, C aufstellen, indem ich von der Idee eines sphärischen Dreiecks ausgehe. Dabei werde ich zur Ableitung reelle Werte der $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ voraussetzen, wir wissen aber von vornherein, daß die so gewonnenen analytischen Formeln nach dem Grundsatz der Functionentheorie allgemeine Gültigkeit auch für complexe $\lambda, \mu, \nu, L, M, N$ haben.

Wir kommen in dieser Weise zu Formeln, wie sie von der Theorie der Riemannschen P-Function aus zuerst von Papperitz in Math. Ann. Bd. 27 S. 331 ff. 1886. aufgestellt und dann neuerdings von Bolza in Math. Ann. Bd 42 S. 535. 1893 abgeleitet worden sind, worüber wir ja vor einigen Wochen

im Seminar einen Vortrag gehört haben.



Irgend eine Substitution

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta},$$

welche eine Drehung der Kugel um einen Durchmesser vorstellt, kann man durch folgende Formeln darstellen, wegen deren Ableitung ich auf meine „Vorlesungen über das Ikosaeder" S. 34. verweise. Es seien ξ, η, ζ die rechtwinkligen Coordinaten des Endpunkts der Drehungsaxe, φ der Drehungswinkel an diesem Punkte in positivem Sinn gemessen. Dann setze man

$$a = \xi \sin\frac{\varphi}{2},\quad b = \eta \sin\frac{\varphi}{2},\quad c = \zeta \sin\frac{\varphi}{2},\quad d = \cos\frac{\varphi}{2}$$

so daß also $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ ist. Dann heißt die Substitution, welche diese Drehung vorstellt:

$$\eta' = \frac{(d + ic)\eta - (b - ia)}{(b + ia)\eta + (d - ic)}.$$

Nun seien a_1, b_1, c_1 die Ecken eines sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ und den Seiten $l\pi$ $m\pi, n\pi$. Es handelt sich darum, die drei Drehungen $2\lambda\pi, 2\mu\pi, 2\nu\pi$ um die drei Ecken

durch die Winkel und Seiten des Dreiecks darzustellen. Ich lege das Dreieck auf der Kugel möglichst bequem, nämlich so, daß die Ecke a_1 in den oberen Punkt ∞ der Kugel fällt, und daß die Ecke b_1 auf dem Meridian der positiven reellen Zahlen liegt.

Dann ist für die Drehung A:

$$\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 1,\ \varphi = 2\lambda\pi$$

d.h. $\quad a = 0,\ b = 0,\ c = \sin\lambda\pi,\ d = \cos\lambda\pi$

also $\quad \eta' = e^{2i\lambda\pi}\eta$, wie selbstverständlich.

Für die Drehung B wird

$$\xi = \sin n\pi,\ \eta = 0,\ \zeta = \cos n\pi,\ \varphi = 2\mu\pi,$$

$$a = \sin n\pi \sin\mu\pi,\ b = 0,\ c = \cos n\pi \sin\mu\pi,\ d = \cos\mu\pi.$$

also

$$\eta' = \frac{(\cos\mu\pi + i\cos n\pi \sin\mu\pi)\eta + i\sin n\pi \sin\mu\pi}{i\sin n\pi \sin\mu\pi \cdot \eta + (\cos\mu\pi - i\cos n\pi \sin\mu\pi)}.$$

Für C wird

$$\xi = \sin m\pi \cos\lambda\pi,\ \eta = \sin m\pi \sin\lambda\pi,\ \zeta = \cos m\pi,\ \varphi = 2\nu\pi,$$

$$a = \sin m\pi \cos\lambda\pi \sin\nu\pi,\ b = \sin m\pi \sin\lambda\pi \sin\nu\pi,\ c = \cos m\pi \sin\nu\pi,\ d = \cos\nu\pi.$$

$$\eta' = \frac{(\cos\nu\pi + i\cos m\pi \sin\nu\pi)\eta - \sin m\pi \sin\nu\pi(\sin\lambda\pi - i\cos\lambda\pi)}{\sin m\pi \sin\nu\pi(\sin\lambda\pi + i\cos\lambda\pi)\eta + (\cos\nu\pi - i\cos m\pi \sin\nu\pi)}.$$

Wir sagen:

<u>Der particuläre Zweig $\eta(x)$ läßt sich so auswählen, daß die Substitutionen A, B, C, welche den Umläufen von x um a, b, c entsprechen, gerade diese Gestalt haben.</u>

In der That haben Papperitz und Bolza genau diese Formeln ausgehend von der Theorie der Riemann'schen P-Function abgeleitet. –

Wir wollen das noch etwas specieller ausführen, indem wir zusehen, welcher Zweig η das ist, der diese Substitutionen erleidet.

In der Umgebung der Stelle $x = a$ existiren zwei Fundamentalzweige der P-Function mit den Exponenten λ_1 und λ_2:

$$P^{\lambda_1} = (x-a)^{\lambda_1} f_1(x-a), \quad P^{\lambda_2} = (x-a)^{\lambda_2} f_2(x-a).$$

Soll die Substitution A eine blose Multiplication sein, so muß η von einem constanten Factor abgesehen der Quotient dieser beiden Fundamentallösungen sein:

$$\eta = C \frac{P^{\lambda_1}}{P^{\lambda_2}} = C \cdot (x-a)^{\lambda} f(x-a).$$

Soll η zudem für $x = a$ unendlich werden, so muß der reelle Teil von λ negativ sein, d.h. es muß unter λ_1 der Exponent mit dem kleineren, unter λ_2 der Exponent mit dem größeren reellen Teil verstanden werden.

Dabei ist nun noch die Constante C so zu bestimmen, daß η für $x = b$ den Wert $b_1 = \frac{\sin n\pi}{1 - \cos n\pi} = \cot \frac{1}{2} n\pi$ annimmt.

Wir sehen also, wenn wir diese Constante

mit in die Definition der Fundamentalzwerge $\mathfrak{P}^{\lambda_1}$, $\mathfrak{P}^{\lambda_2}$ aufnehmen:

Wenn wir $\mathfrak{P}^{\lambda_1}$ und $\mathfrak{P}^{\lambda_2}$ in geeigneter Weise normiren, und dann

$$\eta = \frac{\mathfrak{P}^{\lambda_1}}{\mathfrak{P}^{\lambda_2}}$$

setzen, so erleidet dieses η bei den Umläufen des x um die singulären Stellen a, b, c diejenigen drei Substitutionen, welche wir oben aus der Gestalt des sphärischen Dreiecks abgelesen haben. — Hiermit haben wir den unmittelbaren Anschluss an Bolza.

Im Übrigen aber, was wird nun unsere Aufgabe sein? Was der geometrische Kern ist, haben wir gestern gesehen; in diesen werden wir uns nun die Membran des Periodicitätsbereichs eingehängt zu denken haben.

Unser Aufgabe wird es fortan sein, uns von dem Periodicitätsbereich des η, der in den Kern der drei Schraubenaxen A, B, C eingehängt ist, eine völlig concrete Vorstellung zu bilden, damit wir ins Einzelne verfolgen können, wie sich das η bewegt, wenn das x in seiner zerschnittenen Ebene irgend einen Weg beschreibt.

Diese Aufgabe ist leichter formulirt als erledigt;

denn in dieser Richtung ist für complexe λ, μ, ν Schilling noch nicht völlig durchgedrungen. Wir werden die Sache daher vorerst für den Fall reeller $\lambda\ \mu\ \nu$ ausführen. Hier nur noch ein paar allgemeine Bemerkungen:

Was sind für die geometrische Darstellung verwandte Functionen?

<u>Verwandte Functionen sind gleichgruppige Functionen</u>, d.h. Functionen von solcher Beschaffenheit, daß ein passend ausgewählter Zweig der einen bei irgend welchen Umläufen des x genau dieselben Substitutionen erfährt, wie ein Zweig der anderen Function. Die Substitutionen A, B, C sind also für alle verwandten Functionen dieselben; durch diese Substitutionen ist aber der geometrische Kern bestimmt; also gehören alle verwandten Functionen zu demselben Kern, und man kann die der zerschnittenen x-Ebene entsprechenden Periodicitätsbereiche beider Functionen zwischen die Kanten ein- und desselben Kerns einhängen. Aber dabei muß noch eine Bedingung gestellt werden, nämlich die, daß die Ecken a_1, b_1, c_1 auf dem Rande der beiden Bereiche in demselben Sinne aufeinanderfolgen, wie bei einem Umlaufen des Schnittsystems

der x-Ebene die Punkte a, b, c. Functionentheoretisch ist also ein Bereich a, b, c von seinem Gegenbereich $a_2\, b_2\, c_2$, welcher zwischen die andern Enden der drei Schraubenaxen eingespannt ist, wesentlich verschieden, da der Sinn der Aufeinanderfolge der Kanten auf dem Rande der beiden Bereiche nicht derselbe ist.

Verwandte η-Functionen sind solche, deren Periodicitätsbereiche mit gleicher Aufeinanderfolge der Ecken in denselben geometrischen Kern eingehängt sind, woran sich sofort die Forderung knüpft, bei gegebenem geometrischen Kern nicht nur einen einzelnen Periodicitätsbereich, sondern die Gesamtheit der zugehörigen Periodicitätsbereiche zu construiren.

Hieran schließen wir eine zweite Bemerkung: Wir haben zuletzt vor Weihnachten eine Verallgemeinerung der $\wp$-Function dadurch vorgenommen, daß wir dieselbe außer den drei singulären Punkten noch mit k Nebenpunkten ausstatteten. In der Umgebung eines solchen existiren zwei Entwicklungen von der Gestalt

$$(x-x_0)^2 \varphi_1(x-x_0) \quad \text{und} \quad (x-x_0)^0 \varphi_2(x-x_0).$$

Es gibt also einen Zweig η, welcher die Entwicklung besitzt:

$$(x-x_0)^2 P(x-x_0).$$

Ein solcher Zweig bildet aber die einfache Umgebung des Nebenpunktes x_0 auf einen Windungspunkt der η-Ebene ab, in welchem 2 Blätter zusammenhängen; denn während x einen kleinen Umlauf um x_0 macht, umkreist η den entsprechenden Punkt der η-Ebene zweimal. Ebenso wie dieser specielle Zweig η verhält sich der allgemeinste Zweig, welcher ja eine lineare Function des speciellen Zweiges ist; denn durch eine lineare Transformation wird ja die Verzweigungsart nicht geändert. Also:

Jedem einfachen Nebenpunkte der x-Ebene entspricht auf der η-Kugel ein einfacher Verzweigungspunkt, ein Punkt, in welchem zwei Blätter des η-Bereichs zusammenhängen, und wenn σ einfache Nebenpunkte zu einem σ-fachen Nebenpunkte in der Weise zusammenrücken, daß die Exponenten $\sigma+1$ und 0 sind, dann werden σ einfache Verzweigungspunkte im Bereiche η so zusammenrücken, daß ein σ-facher Verzweigungspunkt entsteht, in welchem $\sigma+1$ Blätter im Cyclus

zusammenhängen.

Während also der Periodicitätsbereich der einfachen η-Function keine anderen Verzweigungspunkte enthält, außer etwa in den drei Ecken a_1, b_1, c_1, treten jetzt noch k einfache Verzweigungspunkte im Innern des Bereichs hinzu.

Und weiter kann man die Aufgabe stellen: Man soll sich von der Gestalt des Bereichs mit k Verzweigungspunkten eine concrete Vorstellung machen. –

Daß der geometrische Kern, bei gegebenen λ, μ, ν, wechselt, je nach dem wir eine gerade oder ungerade Zahl k einfacher Nebenpunkte einfügen, haben wir vorhin bereits bemerkt. – [Mo. d. 5. Feb. 94.]

Wir werden jetzt zuvörderst den Fall reeller Exponenten λ, μ, ν behandeln, die unter dieser vereinfachenden Voraussetzung zu findenden Resultate werden vielfach von selbst nach dem Princip der analytischen Fortsetzung eine allgemeinere Bedeutung auch für complexe Exponenten haben.

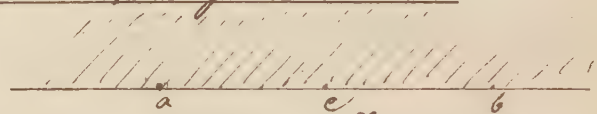
Wenn λ, μ, ν reell ist, und wir werfen durch eine projektive Transformation des x die singulären Punkte $a\ b\ c$ auf die reelle Axe, so erhält die Differentialgleichung für η überhaupt reelle Coefficienten:

$$[\eta] = R(x) \text{ mit reellen Coefficienten.}$$

Auf diesem Umstand gründet sich eine große Erleichterung der ganzen Betrachtungsweise.

Während wir im allgemeinen Fall die x-Ebene in der Weise zerschnitten, daß wir von irgend einem Hülfspunkte O aus nach den Punkten a, b, c Einschnitte legten, werden wir jetzt für reelle Differentialgleichungen bequemer folgendermaßen verfahren:

Wir denken uns die x-Ebene längs der ganzen reellen Axe aufgeschnitten, so daß sie in eine positive und in eine negative Halbebene zerfällt, und wir untersuchen dann zunächst, wie sich die positive Halbebene für sich auf die η-Kugel abbildet.



Wollen wir den Zusammenhang mit unserer früheren Zerschneidung der Ebene durch ein dieselbe nicht zerfallendes Einschnittsystem haben, so brauchen wir nur längs irgend eines der drei Segmente, etwa längs a b, die Zerschneidung rückgängig zu machen. Wir haben dann einfach unsere frühere Zerschneidung,

nur so specialisirt, daß der Hülfspunkt O mit dem singulären Punkt c zusammengelegt ist. Da aber hierbei einer der singulären Punkte bevorzugt und

die Symmetrie gestört wird, so werden wir die Zerschneidung längs der ganzen reellen Axe bevorzugen.

Wir finden dann sofort folgendes einfache Resultat, welches wir an die Spitze der weiteren Untersuchungen zu stellen haben:

Die Halbebene x überträgt sich auf die η-Ebene in besonders einfacher Gestalt, nämlich als ein Kreisbogendreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

Hierbei ist der Begriff eines Dreiecks ein engerer als früher, wo wir unter einem Kreisbogendreieck, oder, was im wesentlichen dasselbe ist, unter einem sphärischen Dreieck nur eine Zusammenstellung von 6 zusammengehörigen Winkel- und Seitenzahlen verstanden; jetzt müssen wir, wie in der elementaren Geometrie, die Forderung stellen, daß dazu eine bestimmte Fläche, eine zwischen den Seiten mit ihren Winkeln ausgespannte Membran gehört. Wir werden also genauer sagen müssen:

Das Abbild der positiven Halbebene ist eine „Kreisbogendreiecksfläche." mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$.

Dieser wichtige Satz ist in der mehrfach genannten Arbeit von Schwarz zu Grunde gelegt, und, wie schon bemerkt, bereits Riemann bekannt gewesen.

Wir haben den Satz jetzt zu beweisen. Zu dem

Zwecke erinnern wir uns, daß aus irgend einem speciellen Zweig η_0 der allgemeine Zweig durch perspective Transformation $\eta = \frac{\alpha\eta_0+\beta}{\gamma\eta_0+\delta}$ hervorgeht. Kennen wir also den Charakter der Abbildung irgend eines Teils der Begrenzung unserer Halbebene durch einen speciellen Zweig η_0, so gewinnen wir hieraus die Abbildung durch den allgemeinsten Zweig η, indem wir noch irgend eine Kreisverwandtschaft anwenden, bei der bekanntlich alle Winkel ungeändert bleiben, und alle Kreise wieder in Kreise sich verwandeln, wobei gerade Linien als specielle Fälle von Kreisen erscheinen, und also im Allgemeinen in Kreise übergehen.

Wir wollen nun erstens zeigen, daß jedem der drei Segmente ab, bc, ca der reellen Axe je ein Kreisbogen der η-Ebene entspricht, und zweitens, daß die Winkel, welche den gestreckten Winkeln der positiven x. Halbebene bei a, b, c entsprechen, gerade $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sind.

Es sei erstens x_0 ein Punkt der reellen Axe, etwa auf dem Segment ab gelegen. η enthält drei willkürliche Integrationsconstanten, die wir dadurch eindeutig festlegen, daß wir für $\eta_0', \eta_0'', \eta_0'''$ im Punkte x beliebige Werte vorschreiben. Diese Werte $\eta_0, \eta_0', \eta_0''$

im Punkte x_0 seien nun reell gewählt sein. Dann zeigt die Gleichung

$$\frac{\eta_0'''}{\eta_0'} - \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{\eta_0''}{\eta_0'}\right)^2 = R(x) \text{ mit reellen Coeff.,}$$

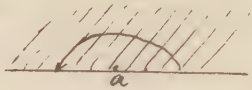
daß sich hierdurch auch der Wert von η_0''' in x_0 als reell berechnen läßt. Durch Differentiation der vorstehenden Differentialgleichung erhält man weitere Formeln, welche ebenso η_0'''' und die höheren Differentialquotienten für den Punkt x_0 zu berechnen gestatten, und zwar sämtlich als reelle Größen. Damit haben wir aber die Coefficienten der Taylor'schen Entwicklung im Punkte x_0 als reelle Größen berechnet; daraus folgt, daß, soweit diese Entwicklung gilt, reellen Werten von x reelle Werte von η_0 entsprechen.

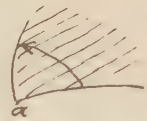
Wir können also den Zweig η_0 in der Weise speciell wählen, daß er in der Nähe von x_0 für reelle Werte von x reell verläuft, d. h. daß das betreffende Stück der reellen Axe in der x-Ebene sich als ein Stück der reellen Axe in der η-Ebene als geradlinig abbildet.

Die Abbildung durch das allgemeinste η hängt aber mit dieser durch Kreisverwandtschaft zusammen, so daß also in der That die Stücke der

reellen Axe in der Ebene des allgemeinen η einzeln als Kreisbogen wiedergegeben sind.

Der zweite Punkt, daß den gestreckten Winkeln





bei a, b, c Winkel von der Größe $\lambda\pi$; $\mu\pi$, $\nu\pi$ in der η-Ebene entsprechen, folgt einfach daraus, daß in der Umgebung von a ein specieller Zweig η_0 sich verhält wie

$$\eta_0 = (x-a)^{\lambda} P(x-a),$$

also einen kleinen Kreisbogen $\lambda\pi$ um 0 beschreibt, wenn x einen Kreisbogen π um a beschreibt. Das Resultat betreffs des Winkels kann sich beim Übergang zum allgemeinen Zweig nicht ändern, womit unsere beiden Behauptungen bewiesen sind.

Endlich sehen wir noch genauer zu, wie die Umgebung einer nichtsingulären Stelle x_0 sich abbildet. Ist die Stelle kein Nebenpunkt der Differentialgleichung, so hat sie die Exponenten 0 und 1, und ein Zweig η_0 verhält sich wie

$$\eta_0 = (x-x_0)^{1} P(x-x_0),$$

d. h. die einfach überdeckte Umgebung von x_0 bildet sich in der Ebene η_0, also auch η, auf die schlichte Umgebung eines Punktes ab. Anders in der Umgebung eines Nebenpunktes.

In einem einfachen Nebenpunkt liegen die Exponenten 0 und 2 vor, und also eine Entwicklung:

$$\eta_0 = (x - x_0)^2 \varphi(x - x_0).$$

Wenn x einen kleinen Kreis um x_0 beschreibt, läuft hier η_0, also auch das allgemeine η, zweimal um den entsprechenden Punkt der η_0 = resp. η = Ebene. Also haben wir das Resultat:

<u>Die Fläche des der positiven Halbebene entsprechenden η- Dreiecks ist ausser etwa in den Ecken (wenn $\lambda, \mu, \nu > 2$) überall schlicht, nur wenn die η- Function mit Nebenpunkten ausgestattet ist, treten Verzweigungspunkte an den correspondirenden Stellen der Dreiecksfläche ein.</u>

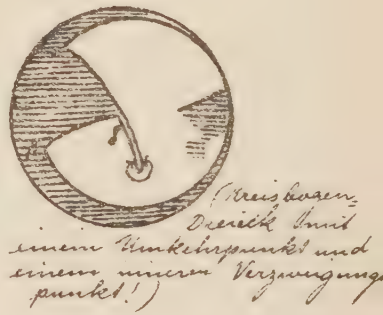
Es habe die η- Function im Ganzen K Nebenpunkte. Dieselben müssen, wenn wir an der Forderung reeller Coefficienten in der Differentialgleichung, also eines von Kreisbogen begrenzten Abbilds der Halbebene x festhalten wollen, notwendig so gelegen sein, dass die einen, etwa K an Anzahl, auf der reellen Axe selbst liegen, die übrigen $2K'$ an Anzahl, sich in K' Paare conjugirt complexer, also zur reellen Axe symmetrisch gelegener Punkte anordnen (übrigens folgt aus einer solchen Anordnung der Nebenpunkte noch nicht umgekehrt,

daß dann die Coefficienten der Differentialgleichung notwendig reell sind.) Den in der positiven Halbebene gelegenen k' Nebenpunkten entsprechen dann, wie wir sahen, k' Windungspunkte im Innern des η-Dreiecks. Den k auf der Begrenzung liegenden Nebenpunkten aber entsprechen Rückkehrpunkte der Begrenzung, da ja die Function

$$\eta_0 = (x - x_0)^2 \cdot \varphi(x - x_0) \text{ mit reellen Coeff.}$$

den gestreckten Winkel bei x_0 auf einem Winkelraum 2π abbildet. Also

<u>Sind k reelle und $2k'$ paarweise conjugirte complexe Nebenpunkte eingeführt, so zeigt die Contur des Kreisbogendreiecks k Umkehrpunkte und die Dreiecksfläche selbst in ihrem Innern noch k' Verzweigungspunkte.</u>



(Kreisbogen-Dreieck mit einem Umkehrpunkt und einem innern Verzweigungspunkt!)

Wir beschränken uns fortan auf den Fall der η-Functionen ohne Nebenpunkte, d. h. auf den Fall der schlichten Kreisbogendreiecke.

Die erste Aufgabe wird sein: das einzelne Dreieck

λ, u, v, seinen Kern, und die Gesamtheit der verwandten Dreiecke genau aufzufassen.

Ferner:

Das einzelne Dreieck ist uns das Abbild der positiven Halbebene. Wir werden dann auf irgend einem Wege in die negative Halbebene übergehen, und uns fragen, wie wird sich die negative Halbebene abbilden. Gehen wir dann auf einen beliebigen Wege in die positive Halbebene zurück, so werden wir zusehen, wie der so gewonnene neue Zweig η die positive Halbebene abbildet. dabei wird uns insbesondere das Schwarz'sche Symmetrieprincip vorzügliche Dienste leisten. Unsere zweite Aufgabe ist also folgende:

Wie setzt sich die durch den Halbzweig η vermittelte, durch das Kreisbogendreieck vorgestellte conforme Abbildung analytisch fort? (Symmetrieprincip.) –

Ein dritter Teil unserer Aufgabe wird sein, daß wir die functionentheoretische Bedeutung der durch die Figuren gegebenen geometrischen Beziehungen uns klar machen.

Was die sphärische Trigonometrie angeht, so bietet sich hier eine neue Frage:

Bei der sphärischen Trigonometrie, wie wir sie besprachen, konnte man die Winkel λ, μ, ν bei einem Dreiecke beliebig vorgeben; dann waren dadurch die l, m, n erst modulo 2 bestimmt.

Hier in unserer Functionentheorie ist aber die Differentialgleichung für η und damit das Kreisbogendreieck der conformen Abbildung $\eta(x)$ durch λ, μ, ν allein im wesentlichen wohlbestimmt.

Es ist dies eine Folge davon, daß wir hier, abweichend von der früher besprochenen allgemeinen sphärischen Trigonometrie, die Forderung einer bestimmten Dreiecksfläche stellen müssen, d. h. verlangen müssen, daß man zwischen die Seiten und Winkel eine Membran einspannen kann.

Wir sagen:

Mit den absoluten Werten der λ, μ, ν sind die absoluten Werte der l, m, n mitgegeben, und zwar ist das immer der Fall, wenn wir wollen, daß sich in unseren Dreiecksrahmen eine Membran einspannen läßt.

Man kommt so zu einer Ergänzung der „transcendenten" sphärischen Trigonometrie, nämlich zu Formeln, welche für den zu betrachtenden Fall die absoluten Werte der l, m, n durch die absoluten

Werte der λ, μ, ν genau festlegen. Ich nenne diese Formeln die „Ergänzungsrelationen" der sphärischen Trigonometrie. Ich habe sie in Math. Ann. Bd. 37. 1890 mitgeteilt. Sie lauten folgendermaßen:

$$\mathcal{E}\left(\frac{l}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right), \quad \mathcal{E}\left(\frac{m}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{-\lambda+\mu-\nu+1}{2}\right), \quad \mathcal{E}\left(\frac{n}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{-\lambda-\mu+\nu+1}{2}\right),$$

unter $\mathcal{E}(x)$ die größte in x enthaltene ganze Zahl verstanden, wenn $x \geqq 0$ ist, dagegen $\mathcal{E}(x) = 0$ gesetzt, wenn $x \leqq 0$ ist.

Wenn also etwa $\lambda - \mu - \nu > 1$ ist, so ist $l > 2$, die Seite l umläuft also einen größten Kugelkreis, bezw. einen Kreis der η-Ebene mehr als einmal, sie „überschlägt" sich.

Im Falle eines Elementardreiecks sind alle $\mathcal{E} = 0$, also keine Seite überspannt ihren Kreis mehrfach.

Soviel über die allgemeine Gliederung unserer nächsten Betrachtungen. [Di d. 6. Feb. 94. I

Ich stelle heute zuerst eine Reihe Behauptungen auf, die ich zum Teil erst später beweisen werde.

1.) Die positive Halbebene x wird durch η auf eine Kreisbogendreiecksfläche abgebildet, diese ist ein einfach zusammenhängendes von einem einzigen aus drei Kreisbogenstücken bestehenden Curvenzug begrenztes Flächenstück.

2.) Wenn umgekehrt auf der η-Kugel eine solche Kreisbogendreiecksfläche gegeben ist, so berufen wir uns auf den Riemann'schen Satz, daß diese conform auf eine Halbebene x abgebildet werden kann. Dann ist nicht schwer zu zeigen, daß die hierdurch festgesetzte Abhängigkeit zwischen η und x gerade durch die Differentialgleichung $[\eta] = R(x; \lambda, \mu, \nu)$ wiedergegeben wird.

3.) Hieraus folgt, daß wir bei Untersuchung unserer conformen Abbildung die allgemeinsten Dreiecksflächen in Betracht zu ziehen haben, die den Bedingungen genügen, einfach zusammenhängend und einfach berandet zu sein. Wir schließen:

4.) Die allgemeinste Dreiecksfläche muß, abgesehen von Umformungen durch Kreisverwandtschaft, durch Angabe der drei Zahlen λ, μ, ν vollkommen bestimmt sein.

5.) Wir werden uns also bei unserer Untersuchung darauf beschränken dürfen, für jedes λ, μ, ν ein Beispiel zu construiren. Dies ist eine große Erleichterung.

6.) Alle Dreiecksflächen $\lambda\ \mu\ \nu$ bilden ein Continuum.

Denn da unsere Differentialgleichung $[\eta] = R(x; \lambda\ \mu\ \nu)$ von den λ, μ, ν rational abhängt, so kann man durch continuirliche Veränderung der λ, μ, ν alle

Differentialgleichungen dieser Gestalt, also auch alle η- Functionen erreichen

7) Wir denken an unsere frühere Eintheilung der sphärischen Dreiecke in zwei Classen, von denen jede für sich ein Continuum bildet. Alle für uns brauchbaren Dreiecke muß man aus einem Elementardreieck durch continuirliche Abänderung erhalten können, da ja ein Elementardreieck gewiß brauchbar ist, und alle brauchbaren Dreiecke ein Continuum bilden. Nun aber gehört ein Elementardreieck zur ersten Classe, und also auch alle aus ihm durch continuirliche Abänderung hervorgehenden Dreiecke. Daraus folgt:

Die Dreiecksflächen $\lambda\,\mu\,\nu$ sind unter den Dreiecken erster Classe einbegriffen; die Dreiecke zweiter Classe und überhaupt die Unterscheidung der beiden Classen bleibt also fortan bei Seite.

8.) Die Dreiecksflächen $\lambda\,\mu\,\nu$ gehören zu einem Kern mit den Winkeln $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$.

9.) Damit ist eine früher noch unerledigt gebliebene Frage beantwortet; nämlich:

Insofern der zum Dreieck gehörige Kern die Amplituden $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ zeigt, folgt, daß auch bei complexen Exponentendifferenzen die Amplituden des

Kern $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sind, während wir früher nur erst bewiesen hatten, daß die Doppelamplituden $2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, $2\nu\pi$ sind. — Demnach hier herrscht Continuität. —

Wir werden nun vor allen Dingen unserm Programm gemäß den Kern des Dreiecks für reelle λ, μ, ν näher betrachten. Wir haben den drei Kreisen auf der η-Kugel entsprechend 3 Ebenen, die ein gewöhnliches 3 Kant bilden.

Diese Dreikante teilen wir in 3 „Fälle" ein, je nachdem der Scheitel des Dreikants im Innern der Kugel, auf der Kugel oder außerhalb der Kugel liegt:

I. Scheitel im Innern der Kugel,

II. Scheitel auf der Kugel,

III. Scheitel außerhalb der Kugel.

Bei dieser Fallunterscheidung, die hier durchaus notwendig ist, wie überhaupt im Folgenden, tritt eine characteristische Eigentümlichkeit der geometrischen Functionentheorie hervor, die im Gegensatz zu der verallgemeinernden Tendenz der meisten Gebiete der höheren Mathematik, wo man solche Fallunterscheidungen immer durch allgemeinere Fassung der Begriffe zu vermeiden bestrebt ist, besonders hervorgehoben zu werden verdient:

Es ist ein allgemeiner Character der folgenden Untersuchungen, wie überhaupt aller eingehenden Untersuchungen der geometrischen Functionentheorie, daß man mit allgemeinen Methoden und Sätzen nicht ausreicht, sondern ins Einzelne gehen muß, etwa so, wie das bei der Elementargeometrie der Alten der Fall war.*) Der Bequemlichkeit halber wollen wir noch Folgendes verabreden:

Im Falle I bringen wir den Scheitel durch eine nichtenklidische Bewegung in den Mittelpunkt der Kugel, im Falle II in den mit ∞ bezeichneten oberen Punkt der Kugel und im Falle III in den unendlich fernen Punkt vertical über der Kugel, so daß also die drei durch den Scheitel hindurchgehenden Ebenen auf der Aequatorebene senkrecht stehen. —

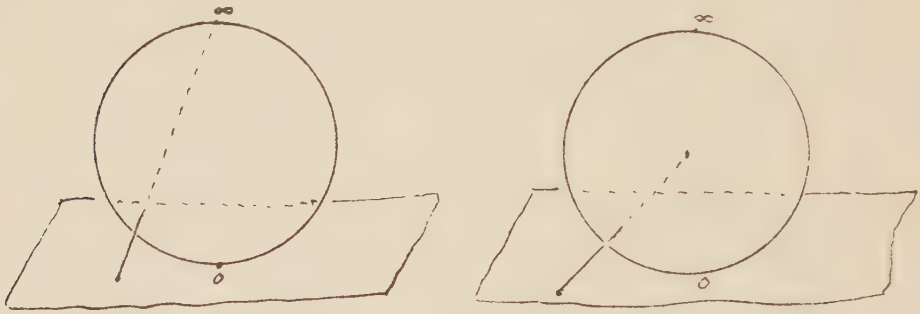
Um die auf der Kugel entstehenden Figuren in der Ebene vorzustellen, können wir jetzt verschiedene Projectionsarten anwenden, insbesondere folgende zwei:

---

*) Wir finden uns also, — so möchte man die Sache auffassen —, in den Anfängen einer neuen mathematischen Entwickelung, bei der wir über die erforderlichen allgemeinen Begriffsbestimmungen noch nicht verfügen.

1.) Die stereographische Projection vom Punkte $\eta = \infty$ der Kugel auf eine Horizontalebene, z. B. auf die in $\eta = 0$ berührende Ebene.

2.) Die Projection von dem Scheitel des Dreikants aus ebenfalls auf eine Horizontalebene:

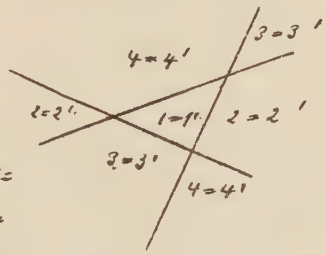


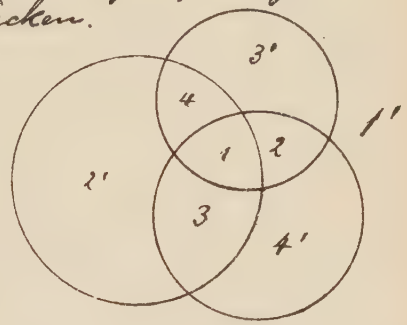
Bei der ersten Projection gehen die von den Ebenen des Dreikants auf der Kugel bestimmten Kreise in Kreise der Ebene über, im zweiten Falle in gerade Linien. Bei der ersten Projection entspricht die Ebene der Kugeloberfläche ein-eindeutig, bei der zweiten dagegen hat man sich die Ebene doppelt überdeckt zu denken, wie eine Doppelfläche, so daß die obere Seite der Ebene der einen Halbkugel, die Unterseite der andern Halbkugel entspricht.

Nun sehen wir zu, was für Figuren der Ebene bei der einen und der andern Projectionsart den drei Arten von Dreikanten entsprechen.

Im Falle I haben wir auf der Kugel ein gewöhnliches sphärisches Dreieck mit den dazu gehörigen Nebendreiecken und Gegendreiecken.

Das gibt in der Ebene bei der ersten Projection ebensoviele Kreisbogendreiecke,





bei der zweiten Projection dagegen nur 4 geradlinige Dreiecke, indem ein Dreieck und sein Gegendreieck jedesmal dasselbe Dreieck der Ebene liefern.

<u>Die Kugeloberfläche ist hier in 8 Dreiecke zerlegt, von denen immer je zwei invers congruent sind.</u>

Für die Zwecke der weitern Untersuchung ist es in diesem Falle völlig gleichgültig, welches der 8 Dreiecke wir auswählen. Nur der Bequemlichkeit halber wollen wir dasjenige, dessen Winkelsumme ein Minimum ist, mit dem besondern Namen „Minimal-Dreieck" belegen. Sind $\lambda\pi_0, \mu\pi_0, \nu\pi_0$ die Winkel des Minimaldreiecks, so sind die Winkel des Nebendreiecks längs der Seite l $\lambda_0\pi, (1-\mu_0)\pi, (1-\nu_0)\pi$. Die um π verminderte Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks, der sogenannte „sphärische Excess," ist bekanntlich der

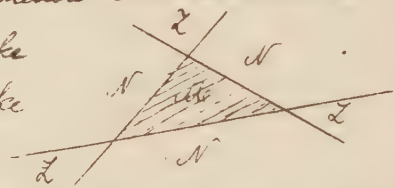
Flächeninhalt des Dreiecks, und als solcher wesentlich positiv. Also:

Das Characteristikum des ersten Falls ist, daß die Winkelsumme des Minimaldreiecks $> \pi$, also

$$\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 > 1$$

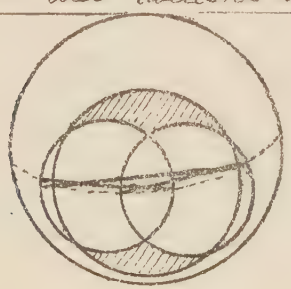
ist.

Im Falle II sind die beiden Projektionen identisch und ergeben drei gerade Linien, die ein ganz im Endlichen liegendes Dreieck (M), drei mit je einer Ecke ins Unendliche reichende Nebendreiecke (N) und drei mit je einer Ecke ins Unendliche reichende Zweiecke (Z) bilden.



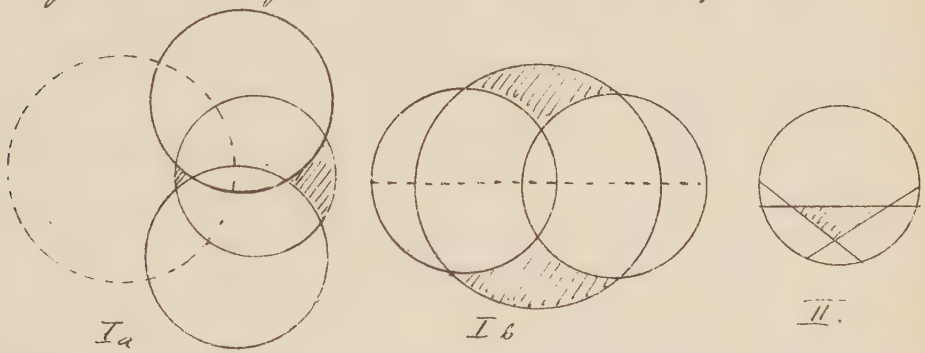
Das endliche Dreieck bezeichnen wir als das Minimaldreieck.

Im Falle II haben wir ein Minimaldreieck mit der Winkelsumme π, also $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1$, dann drei Seitendreiecke mit den Winkeln $\lambda_1 = \lambda_0$, $\mu_1 = 1 - \mu_0$, $\nu_1 = 1 - \nu_0$ etc., so daß also $-\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = 1$ u. s. w. wird, und endlich drei Zweiecke mit den Winkeln λ_0 bezw. μ_0 und ν_0.



Im Falle III stehen alle Ebenen auf der Äquatorebene der Kugel senkrecht, schneiden dieselbe also in Kreisen, welche auf dem Äquatorkreise senkrecht stehen.

Bei der ersten Projectionsart erhalten wir dann drei Kreise, die einen gemeinsamen reellen Orthogonalkreis haben (Fig. I a). Diesen Orthogonalkreis kann man insbesondere durch eine kreisverwandte Umformung in eine grade Linie strecken (Fig. I b).



Bei der zweiten Projection (II) geben die beiden durch den Aequator getrennten Halbkugeln dasselbe Bild, nämlich das Innere eines Kreises, von drei Geraden durchsetzt.

Ein Blick auf die Figur zeigt:

<u>Wir bekommen auf der Kugel zwei congruente, zum Orthogonalkreis symmetrische Dreiecke, drei Zweiecke und drei Vierecke.</u>

Eines der beiden Dreiecke können wir als Minimaldreieck ansehen; man sieht leicht, daß hier dasselbe $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 < 1$ ist.

Wir fassen zusammen:

Die drei Fälle sind dadurch characterisirt, daß für die zugehörigen λ_0 μ_0 ν_0 die Summe im ersten Falle > 1, im zweiten Falle $= 1$, im dritten Falle < 1 ist.

[Do. d. 8. Feb. 94.]

Heute gebe ich zunächst noch einige geometrische Ausführungen betreffend die Trigonometrie der in der letzten Stunde unterschiedenen 3 Arten von Dreiecken.*)

Im Falle I haben wir es mit gewöhnlichen sphärischen Dreiecken zu thun. Da sind $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ die Winkel und Seiten im gewöhnlichen Sinne, also reelle Größen und um 2π periodisch. Im Falle II führt dagegen die analytische Definition der $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$; $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ vermittelst der Cayley'schen Maßbestimmung auf verschwindende Werte der l, m, n. Trotzdem braucht man aber auf die trigonometrischen Formeln nicht ganz zu verzichten. Beim bestimmten Dreieck behalten nämlich, wenn wir ein Dreieck der ersten Art in ein solches der zweiten Art ausarten lassen, die l, m, n, wenn sie auch verschwinden, doch immer noch ganz bestimmte Verhältnisse $l : m : n$. Wir setzen daher

$$l = \frac{l'}{R}, \quad m = \frac{m'}{R}, \quad n = \frac{n'}{R}$$

*) Ausführlicheres hierüber in den Vorlesungsheften über Nichteuklidische Geometrie.

in die Formeln der sphärischen Trigonometrie ein und gehen zur Grenze für $R = \infty$ über. Wir haben einfach zu setzen

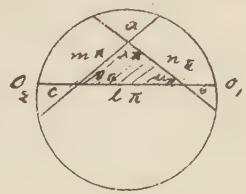
$$\cos\frac{l'}{R} = 1, \quad \sin\frac{l'}{R} = \frac{l'}{R} \quad \text{u. s. w.}$$

und erhalten schließlich beim Wegheben des R die Formeln der gewöhnlichen ebenen Trigonometrie.

Im Falle II werden l, m, n, wenn wir sie direct nichteuklidisch definiren, gleich 0. Die Formeln der sphärischen Trigonometrie behalten trotzdem eine gute Bedeutung, sobald man für l, m, n $\frac{l'}{R}, \frac{m'}{R}, \frac{n}{R}$ und $R = \infty$ einsetzt: sie verwandeln sich dann nämlich in die Formeln der gewöhnlichen ebenen Trigonometrie.

Am interessantesten, weil das meiste Neue bietend, ist der Fall III eines Dreiecks mit reellem Orthogonalkreis. Wir können uns das Dreieck etwa vom Scheitel des Kerns auf die Polarebene des Scheitels projiciren, d. h. wenn wir den Scheitel ins Unendlich ferne legen, auf die Aequatorebene, wie in Fig. II Seite 393.

Die nichteuklidische Definition der Kantenwinkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, und der Seitenwinkel $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ des Dreikants überträgt sich dann unmittelbar auf die Figur in der Aequatorebene, welche ja als Projection



gleichen Doppelverhältnisse bieten muß. Die Winkel und Seiten des ebenen Dreiecks in ist auf den Äquatorkreis bezogenen Cayley'schen Maßbestimmung sind direct die Zahlen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$, $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$. Die Winkel sind hier, wie in der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, wieder reell und um 2π periodisch, die Seitenlängen aber, z. B.

$$l\pi = bc = \frac{i}{2} \log DV(bcO_1O_2)$$

sind rein imaginär; und zwischen den so definirten reellen Größen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ und den rein imaginären Größen $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ gelten dann die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie. Wir fassen unsere Angaben in folgende Sätze zusammen:

Im Falle III sind die Größen λ, μ, ν; l, m, n in der ebenen Figur direct so zu berechnen, als handle es sich um die auf den Umrißkreis zu gründende Cayley'sche Maßbestimmung. Die Größen $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ in dieser Weise in der Ebene gemessen sind reell und stimmen mit den auf der Kugelfläche von den 2 Kreisen gebildeten in gewöhnlicher Weise gemessenen Winkeln überein, während die $l\pi$, $m\pi$, $n\pi$ imaginär ausfallen und in der gewöhnlichen Ansicht auf der Kugel keine einfache Deutung besitzen.

Es handelt sich hier um die ebene Trigonometrie in der gewöhnlichen nicht-euklidischen Geometrie. Es liegt hier derjenige Fall der sphärischen Formeln vor, wo λ, u, ν noch reell, l, m, n rein imaginär sind.

In den Lehrbüchern der Nicht-Euklidischen Geometrie findet man die Formeln der Trigonometrie durchweg in einer andern, von den gewöhnlichen sphärischen Formeln etwas abweichenden Gestalt angegeben. Es kommt das daher, daß man, um es mit reellen Maßzahlen für die Strecken zu thun zu haben, dieselben noch mit einer rein imaginären Constanten dividirt. Die trigonometrischen Functionen der Seitenlängen verwandeln sich dann in die sogenannten hyperbolischen Functionen der neuen reellen Maßzahlen, nach den bekannten Formeln

$$\cos ix = \cos x, \quad \sin ix = i \cdot \sin x.$$

Gewöhnlich setzt man in der nichteuklidischen Geometrie für l, m, n, damit man doch reelle Seitenlängen hat, $i\frac{l}{R}$, $i\frac{m}{R}$, $i\frac{n}{R}$, unter $-\frac{1}{R^2}$ das sogenannte Krümmungsmaß verstanden.

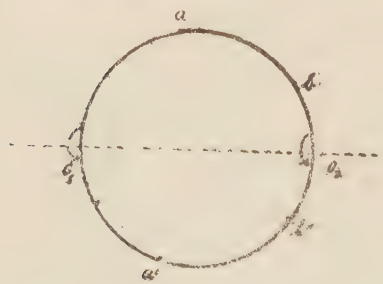
Man sagt daher gewöhnlich, die Formeln der nichteuklidischen ebenen Trigonometrie ergeben sich aus den gewöhnlichen Formeln der sphärischen

Trigonometrie, indem man für l, m, n einsetzt $i\frac{l'}{R}$, $i\frac{m'}{R}$, $i\frac{n'}{R}$, unter R eine beliebige für die betreffende nichteuklidische Geometrie characteristische Größe verstanden.

Endlich schreibt man die bezüglichen Formeln, um das Imaginäre zu vermeiden, gern so, daß man statt der trigonometrischen Functionen der imaginären Argumente die sogenannten hyperbolischen Functionen einführt.

Beim gewöhnlichen sphärischen Dreieck wächst die Seitenlänge um 2π, wenn wir den ganzen Kugelkreis einmal mehr in positivem Sinne durchlaufen, um π, wenn wir die Seite in positivem Sinne bis zum Gegenpunkte ihres Endpunktes verlängern.

Das entspricht dem im III. Falle?



Wenn wir nun die Seite ab über ihren Endpunkt hinaus verlängern, so wird ihre Maßzahl logarithmisch

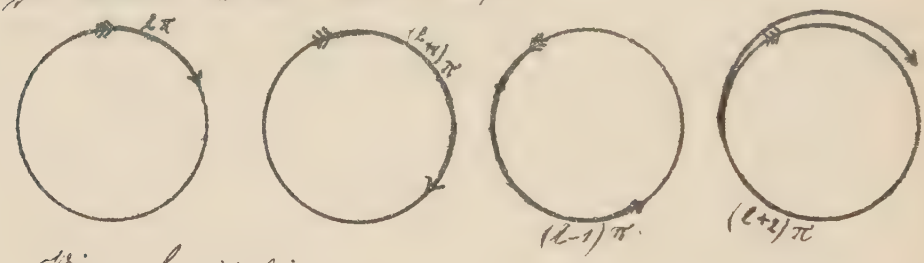
unendlich, sobald man sie bis O_2 verlängert hat, denn in der zweiten Figur, der Projection auf die Aequatorebene, rückt dann ebenfalls b an O_2 heran und in dem Ausdruck

$$\frac{i}{2} \log \frac{a O_2}{a O_1} : \frac{b O_1}{b O_2}$$

wird das Doppelverhältnis unendlich, und zwar wie man leicht sieht, wie das Quadrat des euklidischen Abstandes des Punktes b von O_2 in der ersten Figur.

Wenn wir den Bogen $a\,b$ bis zu dem Gegenpunkt b' von b, d.h. bis zu dem auf demselben Projectionsstrahl liegenden Punkt des andern Halbkreises verlängern, so geht der analytische Ausdruck für die Länge durch den Wert ∞ hindurch, wird also an sich unbestimmt wie $\infty - \infty$. Um ihn dennoch auf Bogen anwenden zu können, welche den Orthogonalkreis durchsetzen, müßen wir eine Verabredung treffen, etwa so, als wenn wir im complexen Gebiete im positiven Sinne herumgingen, wie ich, mit etwas uneigentlicher Deutung der complexen Längenwerte, seitlich zu dem tragenden Kreise, bezw. der Geraden in der Figur selbst durch Pfeile angedeutet habe. Dabei soll der positive Umlaufungssinn bei O_1 und O_2 gelten, wenn man aus der positiven in die negative Halbebene übertritt, umgekehrt der

negative Umkreisungssinn. Treffen wir diese Verabredung, so wächst ab in der That um π, wenn wir b in positivem Sinn bis b' laufen lassen, und nimmt um π ab, wenn b in negativem Sinn bis b' läuft, und es wächst endlich um 2π, so oft b die volle Kreisperipherie in positivem Sinn durchläuft.

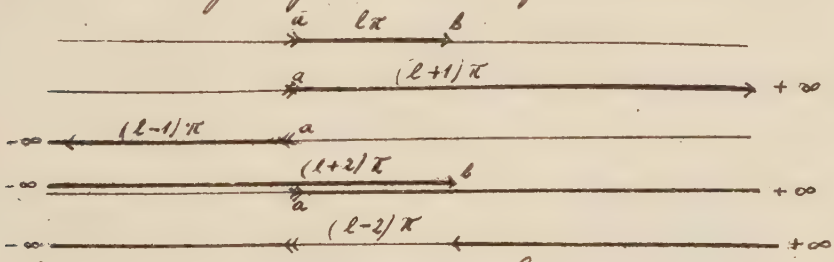


Wir rekapitulieren:

Wenn die l, m, n im vorliegenden Falle zunächst rein imaginär sind, so können wir sie darum doch bei mehrfacher Durchlaufung der fragenden Kreise um beliebige Multipla von 2 vermehren, wenn wir nur die Verabredung einführen, daß irgend zwei Punkte b_1 und b_2, die auf derselben durch das Centrum des Kerns laufenden geraden Linie liegen, genau um π entfernt sein sollen, was mit dem Verhalten des Logarithmus nicht im Widerspruch steht, aber allerdings nur durch eine besondere Verabredung über die Umkreisung der singulären Punkte festgesetzt werden kann.

Etwas entsprechendes werden wir auch im Falle II beim geradlinigen Dreiecke festsetzen können. Eine ganz im Endlichen liegende Seite hat da eine unendlich kleine Länge $l\pi$ — doch dürfen wir sie nicht schlechtweg 0 setzen, sondern wir werden, damit die trigonometrischen Ergänzungsrelationen richtig bleiben, zwischen unendlich klein und genauem Null unterscheiden müssen —.

Lassen wir den Endpunkt b der Strecke ab bis ins Unendliche laufen, so werden wir sagen, wir haben die Strecke genau um π verlängert, lassen wir den Endpunkt die ganze Gerade durchs Unendliche hindurch bis wieder zum Punkte b durchlaufen, so soll das als Verlängerung um 2π bezeichnet werden.



[Fr. d. 9. Feb. 94.]

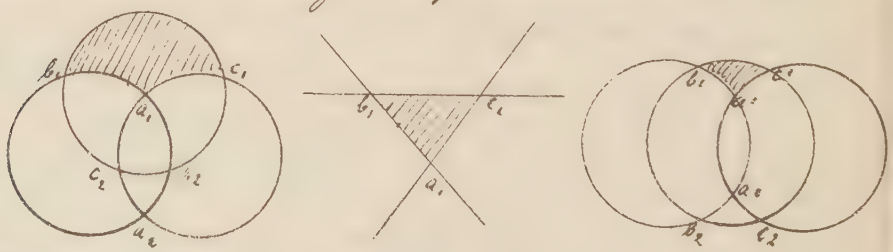
Wir haben in den letzten Stunden gesehen, wie der Kern in den drei Fällen I II III zu der Kugel liegt. Es wird nun unsere Aufgabe sein, in diesen Kern auf alle möglichen Weisen eine Dreiecksfläche wie eine Membran einzuspannen, und uns von den

verschiedenen möglichen Gestalten derselben eine recht klare Vorstellung zu machen.

Alle diejenigen so zu findenden Dreiecksflächen, auf deren Begrenzung die Kanten des Kerns in gleichem Sinn aufeinanderfolgen, werden dann verwandte Functionen liefern, und zu allen verwandten Functionen gehören solche Dreiecksflächen.

Vorläufig jedoch werden wir auf den Sinn der Aufeinanderfolge der Kanten des Kerns kein Gewicht legen, um erst hinterher, was ich am Montag anführen werde, die Modificationen zu besprechen, die durch Berücksichtigung der Reihenfolge nöthig werden.

Wir gehen von dem Minimaldreieck aus, welches in den drei Fällen $\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 \gtreqless 1$ etwa folgende Gestalten haben mag (wobei der Fall ganzzahliger λ, μ, ν vorerst ausgeschlossen werden soll):



Ein Minimaldreieck soll mit $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ bezeichnet werden. Seine Winkel $\lambda_0\pi$, $\mu_0\pi$, $\nu_0\pi$ sind nicht nur

jeder selbst kleiner als π, sondern es ist auch die Summe von irgend zwei Winkeln stets kleiner als π oder höchstens $= \pi$.

Die Zahlen λ_0, μ_0, ν_0 genügen also den Bedingungen:

$$\lambda_0 < 1, \quad \mu_0 + \nu_0 \leqq 1,$$
$$\mu_0 < 1, \quad \nu_0 + \lambda_0 \leqq 1$$
$$\nu_0 < 1, \quad \lambda_0 + \mu_0 \leqq 1.$$

Durch diese Bedingungen ist das Minimaldreieck unter den von den nämlichen drei Kreislinien begrenzten Dreiecken im Allgemeinen eindeutig festgelegt, wenigstens wenn man symmetrische Gegendreiecke nicht als verschieden ansieht.

Wir gehen nunmehr vom Minimaldreieck zu einer umfassenderen Gruppe von Dreiecken über, welche wir mit $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ bezeichnen, indem wir nämlich die Nebendreiecke, bezw deren Gegendreiecke hinzunehmen. λ_1, μ_1, ν_1 bezeichnen also außer der Winkelzusammenstellung λ_0, μ_0, ν_0 noch die drei Zusammenstellungen $\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0$; $1-\lambda_0, \mu_0, 1-\nu_0$; $1-\lambda_0, 1-\mu_0, \nu_0$.

Die 4 Dreiecke $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ genügen dann nur noch den Ungleichungen

$$\lambda_1 < 1, \quad \mu_1 < 1, \quad \nu_1 < 1$$

und sind durch diese vollständig characterisirt.

Eine fernere Erweiterung endlich nehmen wir vor,

indem wir in jedem dieser Dreiecke immer für einen Winkel seine Ergänzung zu 2π setzen, die neuen Dreiecke, welche also die Winkelzahlen

$2-\lambda_0, u_0, v_0$; $2-\lambda_0, 1-u_0, 1-v_0$; $\lambda_0, 1+u_0, 1-v_0$
u. s. w. u. s. w. u. s. w.

haben, einschließlich der Dreiecke λ_1, u_1, v_1 selbst, wollen wir mit $(\lambda_2\ u_2\ v_2)$ benennen. Sie genügen nur noch der Bedingung, daß kein Winkel größer als 2π und keine zwei Winkel größer als π sind.

Die sämtlichen 16 Dreiecke, welche den letzten Bedingungen genügen, nennen wir reducirte Dreiecke.

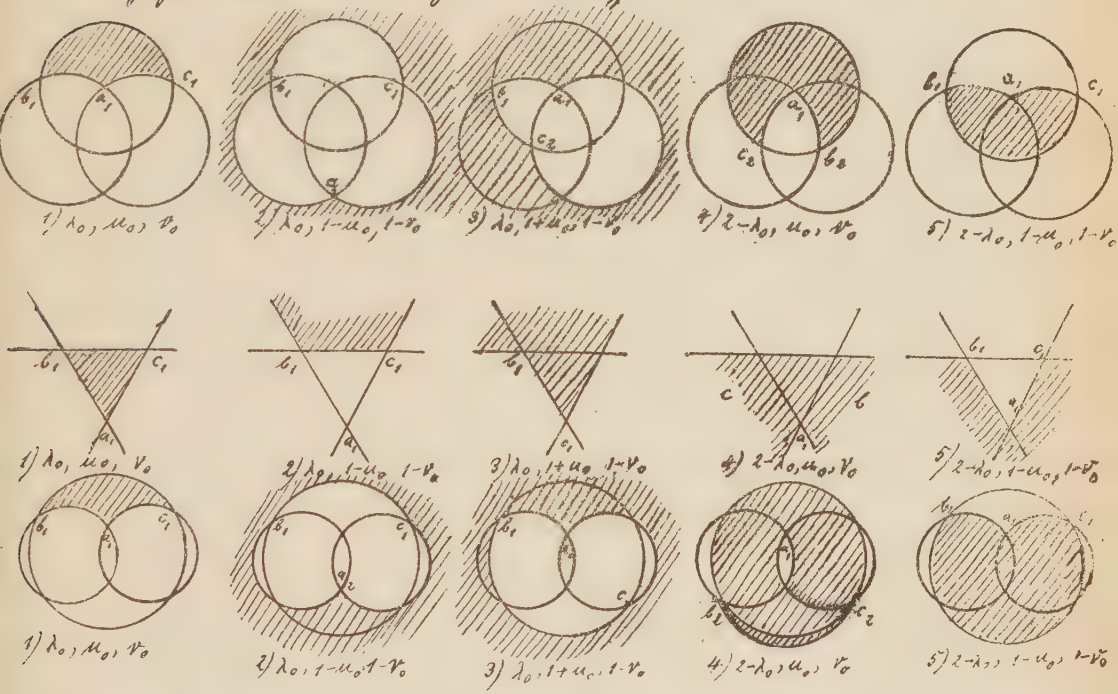
Ein Dreieck soll also ein reducirtes Dreieck heißen, wenn kein Winkel größer als 2π ist, und wenn keine zwei Winkel existiren, die größer als π sind.

Wir wollen nun zusehen, ob man alle die 16 arithmetisch möglichen reducirten Dreiecke in jedem der Fälle I II III wirklich in das gegebene System von Kreisbogen einhängen kann. Ich zeichne einfach die Figuren für die 5 Typen

(λ_0, u_0, v_0), $(\lambda_0, 1-u_0, 1-v_0)$, $(\lambda_0, 1+u_0, 1-v_0)$, $(2-\lambda_0, u_0, v_0)$, $(2-\lambda_0, 1-u_0, 1-v_0)$

hin, woraus dann durch Drehung resp Spiegelung (natürlich nur im Sinne der analysis situs zu verstehen) alle andern Dreiecke folgen. Dabei achten wir,

wie schon gesagt, nicht auf die Aufeinanderfolge der Ecken, sehen also jedes Dreieck mit seinem Gegendreieck als gleichwertig an



Wir haben damit in der That in jedem der drei Fälle I II III für jedes der 16 reducirten Dreiecke einen Repräsentanten construirt.

Nun zu jedem der drei Fälle noch einige besondere Bemerkungen:

In der sphärischen Trigonometrie haben wir früher 64 Stämme verwandter Dreiecke unterschieden. Diesen entsprechen nun gerade unsere 16 reducirten Dreiecke

des Falles I, wobei die Verringerung der Anzahl davon herrührt, daß wir die Winkel und Seiten an einer Membran durchweg als positiv zählen, so daß immer je 4 Stämme nur ein Dreieck geben.

Die 16 Dreiecke $(\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$, welche wir jetzt construirt haben, geben für jeden der 16 zu unterscheidenden Stämme verwandter Dreiecke jedesmal einen Repräsentanten.

Der gleiche Satz gilt auch für die beiden andern Fälle.–

Im Falle II wollen wir auf die Winkelrelationen achten.

Die Winkel des Minimaldreiecks genügen der Gleichung:

$$\lambda_0 + \mu_0 + \nu_0 = 1.$$

Daraus folgt aber, daß in unseren 5 Figuren je folgende Gleichungen gelten:

$$\lambda + \mu + \nu = 1, \quad -\lambda + \mu + \nu = 1, \quad \lambda + \mu - \nu = 1, \quad \lambda - \mu - \nu = 1, \quad \lambda + \mu + \nu = 3.$$

Achten wir zugleich darauf, welche Ecken im Unendlichen liegen, so ergibt sich die Regel:

Für alle unsere 16 geradlinigen Dreiecke $(\lambda_2 \mu_2 \nu_2)$ gilt eine Formel von der Gestalt

$$\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2r + 1, \quad r \geq 0$$

wobei immer diejenigen Winkel negativ einzusetzen sind, welche sich auf unendlich weit liegende Ecken beziehen.

Die Vorzeichencombination $-, -, -$ ist hier natürlich arithmetisch unmöglich, was der geometrischen Thatsache entspricht, daß ein geradliniges Dreieck nicht alle seine Ecken im Unendlichen haben kann.

Im Falle der Figuren II^4 und III^4 tritt uns zum ersten Male die Erscheinung entgegen, daß eine Dreiecksseite, nämlich $l\pi$, ihren ganzen Kreis umspannt, nämlich in II^4 sich genau schließt, (im Unendlichen), in III^4 sich überschlägt. Das hätten wir aber schon von vornherein aus den früher angegebenen Ergänzungsrelationen der sphärischen Trigonometrie schließen können. In der That, bilden wir

$$\mathcal{E}\left(\frac{l}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{\lambda - u - v + 1}{2}\right),$$

und setzen $\lambda = 2 - \lambda_0$, $u = u_0$, $v = v_0$, so geht die rechte Seite über in

$$\mathcal{E}\left(\frac{3 - (\lambda_0 + u_0 + v_0)}{2}\right).$$

Nun ist aber im Falle II^4 $\lambda_0 + u_0 + v_0 = 1$, im Falle III^4 $\lambda_0 + u_0 + v_0 < 1$, also in jedem Falle $3 - (\lambda_0 + u_0 + v_0) \geqq 2$, die rechte Seite also $= 1$. Dann folgt aus

$$\mathcal{E}\left(\frac{l}{2}\right) = 1,$$

daß $l \geqq 2$ ist, mit andern Worten, daß die Seite $l\pi$ sich schließt oder überschlägt.

Untersuchen wir auch alle übrigen Fälle unserer Figuren auf unsere Ergänzungsrelationen hin, so zeigt sich:

Bei den sämtlichen von uns aufgestellten Dreiecken stimmen, wie man sich durch den Augenschein überzeugt, die Ergänzungsrelationen, die wir im Voraus schon angegeben hatten, mit den Thatsachen überein.

Wir haben oben unsere Dreiecke als reducirte Dreiecke bezeichnet und dieselben dadurch characterisirt, daß kein Winkel $> 2\pi$ und keine zwei Winkel $> \pi$ seien.

Wir behaupten jetzt ausdrücklich:

Indem wir unsere 16 Dreiecke (λ_2, u_2, v_2) bei den dreierlei Axen construirten, haben wir gerade alle reducirten Dreiecke construirt, die es überhaupt gibt.

Wir beweisen das, indem wir zuerst arithmetisch von dem Zahlentripel (λ_2, u_2, v_2) aus ein Zahlentripel (λ_0, u_0, v_0) herstellen, welches den Ungleichungen des Minimaldreiecks genügt, dazu ein Minimaldreieck herstellen und dann geometrisch durch Rückwärtsdurchlaufung des arithmetischen Processes uns das Dreieck (λ_2, u_2, v_2) construiren.

Seien irgend drei Winkelzahlen (λ_2, u_2, v_2) gegeben,

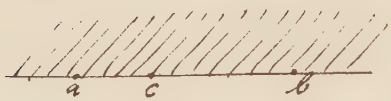
welche der Bedingung genügen, daß jede kleiner als 2, und mindestens zwei kleiner als 1 sind, so sind entweder schon alle Winkelzahlen kleiner als 1, oder es ist eine Zahl, etwa λ_2, größer als 1 (ganzzahlige Winkelzahlen sind ja vorläufig ausgeschlossen). Im ersteren Falle ist das Tripel schon ein Tripel $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, im andern Falle ist $\lambda_1 = 2 - \lambda_2$ $\mu_1 = \mu_2$ $\nu_1 = \nu_2$ ein solches Tripel. Ist dieses Tripel $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ nun nicht von selbst ein Minimaltripel, so ist, $\lambda_1 \geqq \mu_1 \geqq \nu_1$ vorausgesetzt, $\lambda_1 + \mu_1 > 1$, $\lambda_1 - \nu_1 \geqq 0$, $\mu_1 - \nu_1 \geqq 0$. Dann bilde ich $\lambda_0 = 1 - \lambda_1$, $\mu_0 = 1 - \mu_1$, $\nu_0 = \nu_1$; und man sieht, daß $\lambda_0 + \mu_0 = 1 - (\lambda_1 + \mu_1) < 1$, $\lambda_0 + \nu_0 = 1 - (\lambda_1 - \nu_1) \leqq 1$, $\mu_0 + \nu_0 = 1 - (\mu_1 - \nu_1) \leqq 1$ ist, daß also λ_0, μ_0, ν_0 ein Minimaltripel ist.

Wenn wir so die 3 Zahlen λ_0, μ_0, ν_0 arithmetisch definirt haben, so können wir ein zu ihnen gehöriges Minimaldreieck gewiß construiren und von diesem durch unsere geometrischen Figuren zu einem Dreieck mit den Winkelzahlen λ_2, μ_2, ν_2 aufsteigen.

Um das Dreieck zu construiren, welches zu einem gegebenen reducirten Wertetripel λ_2, μ_2, ν_2 gehört, berechnen wir arithmetisch das zugehörige

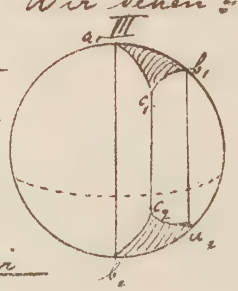
Minimaltripel $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$, constituiren das entsprechende Minimaldreieck und steigen von diesem durch die heute gegebenen Figuren zu dem Dreieck λ_2, μ_2, ν_2 auf. [Mo. d. 12. Feb. 94

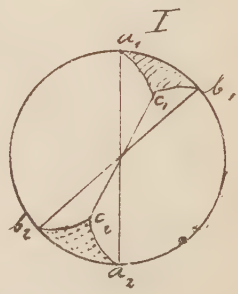
In der letzten Stunde haben wir auf die Reihenfolge, in welcher sich die Ecken der Membran dem Auge darstellen, ob sie im Sinne des Uhrzeigers aufeinander folgen, wie z. B. in I_1, oder ob im entgegengesetzten Sinne, wie in II^2, noch keinen Wert gelegt. Nun ist aber ganz klar, wenn wir wollen, daß das Dreieck der positiven x-Halbebene entsprechen soll, auf deren Rand die Punkte a, b, c in derselben Reihenfolge wie $0\ \infty\ 1$ aufeinanderfolgen, daß dann die Ecken notwendig im Sinne des Uhrzeigers aufeinanderfolgen müssen.



Die hierdurch notwendig werdende Ergänzung unserer Betrachtungen wollen wir heute geben. Wir sehen:

In den Fällen I und III erreichen wir den Übergang von der einen Reihenfolge der Ecken zur andern, indem wir

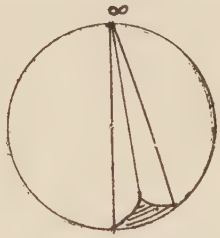




den Kern festhalten und einfach zum Gegendreieck übergehen.

Der tiefere Grund für diese Möglichkeit ist natürlich der, daß der Kern in diesen Fällen sich selbst symmetrisch ist

Beim Kern II ist jedoch eine solche Symmetrie des Kerns mit sich selbst nicht vorhanden. Da artet das Gegendreieck jedes wirklichen Dreiecks immer in ein oder mehrere Zweiecke, ja in einen Punkt aus.



<u>Wir müssen also im Falle II neben den Kern einen zweiten, von ihm verschiedenen Kern stellen, nämlich den symmetrischen, um an ihm diejenigen Dreiecke mit der richtigen Kantenaufeinanderfolge einzuhängen, die man am ersten Kern nur mit falscher Eckenaufeinanderfolge findet;</u> und zwar zeigt sich daß von den 5 auf S. 405 dargestellten Typen nur die Typen 1) und 3), λ_0, u_0, v_0 und $\lambda_0, 1+u_0, 1-v_0$, zu welchen insgesamt 7 Dreiecke gehören, die richtige Aufeinanderfolge der Ecken haben, daß aber die durch die drei Typen 2) $\lambda_0, 1-u_0, 1-v_0$, 4) $2-\lambda_0, u_0, v_0$, 5) $2-\lambda_0, 1-u_0, 1-v_0$ vorgestellten 9 Dreiecke die falsche Kantenaufeinanderfolge besitzen. Also:

Im Falle II gehören zum einen Kern die 7 Dreiecke λ_0, μ_0, ν_0; $\lambda_0, 1+\mu_0, 1-\nu_0$, zum symmetrischen Kern die 9 Dreiecke $\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0$; $2-\lambda_0, \mu_0, \nu_0$; $2-\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0$.

Was bedeuten nun diese Erwägungen für unsere η-Functionen?

Wann haben wir zwei η-Functionen verwandt zu nennen? Dann, wenn sich von jeder zwei Particularzweige so auswählen lassen, daß beide Zweigpaare bei gleichen Umläufen von x dieselben Substitutionen erleiden. Wir haben früher gesagt, daß sei der Fall, wenn die beiderseitigen Fundamentalbereiche in denselben Kern eingehängt sind. Das müssen wir aber genauer präcisiren, indem wir auf die Aufeinanderfolge der Ecken achten. Indem wir uns hier auf reelle λ, μ, ν beschränken, sagen wir:

Zwei η-Functionen mit reellen λ, μ, ν heißen verwandt, wenn die Dreiecke λ, μ, ν mit richtiger Aufeinanderfolge der Ecken genommen in denselben Kern eingehängt werden können.

Fragen wir nun mit dieser verschärften Definition, ob die zu den 16 reduirten Dreiecken $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ gehörigen η-Functionen

$$\eta\left(\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{matrix} \; x\right)$$

alle mit einander verwandt sind, so finden wir sofort:

<u>In den Fällen I und III sind sämtliche 16 η-Functionen $\eta\left(\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{matrix} x\right)$ miteinander verwandt, dagegen im Falle II sind nur 7 resp. 9 dieser Functionen je unter sich verwandt.</u>

Dies letztere steht aber im directem Widerspruch zu dem, was Riemann und auf Grund Riemann's Papperitz in Math. Ann. 25 über die η-Function sagt:

Riemann sagt: Zwei P-Functionen sind verwandt, wenn sich die Exponenten um ganze Zahlen unterscheiden, und Papperitz: zwei η-Functionen sind verwandt, wenn sich die Exponentendifferenzen abgesehen vom Vorzeichen um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden.

Dann müßten aber alle unsere $\eta\left(\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{matrix} x\right)$ immer verwandt sein, was, wie wir nun wissen, nur in den Fällen I und III der Fall ist. Wir haben also hier eine Lücke in der Riemann'schen Arbeit, und es fragt sich, wo die Unrichtigkeit in die Riemann'sche Arbeit hineinkommt.

Riemann setzt in No. 3 die Fundamentalzweige des einen singulären Punktes a aus denjenigen von

b und von c vermittelst gewisser Coefficienten $a_\beta\ a_{\beta'}$ u. s. w. zusammen, und sagt dann, wenn man irgend 5 der Grössen $a_\beta\ a_{\beta'}\ a_\beta'\ a_{\beta'}'\ a_\gamma\ a_{\gamma'}\ a_\gamma'\ a_{\gamma'}'$ beliebig vorgebe, so seien dadurch alle übrigen bestimmt, nämlich durch Relationen von der Gestalt:

$$\frac{a_\gamma}{a_{\gamma'}'} = \frac{a_\beta}{a_{\beta'}'}\,\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma')\pi \cdot e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta+\gamma')\pi \cdot e^{-\alpha'\pi i}} = \frac{a_{\beta'}}{a_{\beta'}'}\,:\,\frac{\sin(\alpha+\beta'+\gamma')\pi \cdot e^{-\alpha\pi i}}{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')\pi \cdot e^{-\alpha'\pi i}},$$

er sagt dann ferner in N: 6, diese Relationen bleiben ungeändert, wenn man sämmtliche Exponenten einer P-Function um ganze Zahlen ändere; also müssten bei gleicher Vorgabe der 5 willkürlich gewählten Grössen $a_\beta\ a_{\beta'}$ u. s. w. auch die übrigen, und damit die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleiben.

Dies ist in den Fällen I und III richtig. Im Falle II besteht aber, wie wir wissen immer eine Relation der Gestalt

$$\pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2r+1$$

also

$$\pm(\alpha-\alpha') \pm (\beta-\beta') \pm (\gamma-\gamma') = 2r+1,$$

woraus in Verbindung mit

$$+(\alpha+\alpha') + (\beta+\beta') + (\gamma+\gamma') = 1$$

je nachdem Vorzeichen zwei Relationen etwa von der Art wie (für + + −)

$$\alpha + \beta + \gamma' = \nu + 1$$
$$\alpha' + \beta' + \gamma = -\nu$$

folgen. Dann verschwinden aber gerade zwei der in den Verhältnissen der $\alpha\beta$ $\alpha\beta'$ u. s. w. vorkommenden sinus, so daß man nicht mehr 5 dieser Größen willkürlich vorgeben kann, ohne daß die andern unbestimmt oder unendlich werden. Also:

<u>Die Definition der Verwandtschaft ist bei Riemann nur so allgemein gefaßt, daß sie für den Fall II. nicht ausreicht.</u>

Übrigens wird die Theorie der Verwandtschaft auch noch für die Fälle ganzzahliger λ, μ, ν besonders zu ergänzen sein, welchen Fall Riemann von vornherein ausgeschlossen hat. —

Nun wollen wir von unsern reducirten Dreiecken aus zu den allgemeinsten Dreiecken desselben Kerns übergehen.

Es sei irgend ein Zahlentripel λ, μ, ν gegeben. Aus diesem wollen wir uns zuerst arithmetisch ein reducirtes Tripel λ_2, μ_2, ν_2 herstellen.

Dabei haben wir zwei Fälle zu unterscheiden. Wir nennen nämlich ein <u>Tripel 1. Art</u> ein solches, bei welchem die Summe irgend zweier Zahlen immer größer als die dritte Zahl ist, also

$$\lambda + \mu > \nu, \quad \lambda + \nu > \mu, \quad \mu + \nu > \lambda.$$

Dagegen verstehen wir unter einem <u>Tripel 2. Art</u> ein solches, bei dem die größte Zahl — welche wir immer λ nennen wollen — größer als die Summe der beiden andern Zahlen ist, also $\lambda > \mu + \nu$.

Haben wir ein Tripel (λ, μ, ν) erster Art, so setzen wir zuvörderst:

$$\lambda = \beta + \gamma, \quad \mu = \gamma + \alpha \quad \nu = \alpha + \beta,$$

also $\alpha = \frac{-\lambda + \mu + \nu}{2}, \quad \beta = \frac{\lambda - \mu + \nu}{2}, \quad \gamma = \frac{\lambda + \mu - \nu}{2}.$

α, β, γ sind dann lauter positive Zahlen. Ferner setzen wir

$$\alpha = a + \alpha', \quad \beta = b + \beta' \quad \gamma = c + \gamma',$$

unter α', β', γ' echte Brüche verstanden. Dann wird, wenn ich

$$\beta' + \gamma' = \lambda', \quad \gamma' + \alpha' = \mu', \quad \alpha' + \beta' = \nu'$$

setze:

$$\lambda = b + c + \lambda' \quad \mu = c + a + \mu', \quad \nu = a + b + \nu'.$$

und λ', μ', ν' sind sämtlich kleiner als 2. Sind nun keine zwei derselben größer als 1, so ist λ', μ', ν' ein reducirtes Tripel λ_2, μ_2, ν_2, wenn nicht, so sind mindestens zwei Zahlen, etwa μ' und ν' beide größer als 1. In diesem Falle setze ich

$$\lambda' = \lambda_2, \quad \mu' = 1 + \mu_2, \quad \nu' = 1 + \nu_2$$

und habe dann in λ_2, μ_2, ν_2 ein reducirtes Tripel.

λ, μ, ν ist also entweder

$$\lambda = b + c + \lambda_2, \quad \mu = c + a + \mu_2, \quad \nu = a + b + \nu_2$$

oder $\lambda = b + c + \lambda_2, \quad \mu = c + (a+1) + \mu_2, \quad \nu = (a+1) + b + \nu_2$.

Schreiben wir im zweiten Falle einfach a für $a+1$, so hat man beidemal dieselbe Gestalt der Darstellung. $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ ist ein reducirtes Tripel; das entsprechende Dreieck muß also unter unsern 5 Typen enthalten sein; wir behaupten aber, es kann nicht jedem der gezeichneten Typen angehören, nämlich nicht den Typen $\overline{II}^4$ und $\overline{III}^4$, in denen eine Seite ihre ganze Kreisperipherie umspannt.

Wir setzen $\varepsilon\left(\frac{\lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 + 1}{2}\right)$.

Wenn $\lambda' = \beta' + \gamma'$, $\mu' = \gamma' + \alpha'$, $\nu' = \alpha' + \beta'$ direct $= \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ waren, so wird

$$\varepsilon\left(\frac{\lambda_2 - \mu_2 - \nu_2 + 1}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{1 - 2\alpha'}{2}\right) = 0,$$

ebenso $\varepsilon\left(\frac{-\lambda_2 + \mu_2 - \nu_2 + 1}{2}\right) = 0$ und $\varepsilon\left(\frac{-\lambda_2 - \mu_2 + \nu_2 + 1}{2}\right) = 0$,

so daß also in der That keine Seite ihren Kreis umspannen kann.

Waren dagegen zwei der Zahlen λ', μ', ν' oder alle drei größer als 1, etwa μ' ν' die beiden größten Zahlen, so muß α' notwendig größer als $\frac{1}{2}$ sein.

Unsere drei ε-Ausdrücke ergeben aber, wenn man $\lambda_2 = \beta' + \gamma'$, $\mu_2 = \gamma' + \alpha' - 1$, $\nu_2 = \alpha' + \beta' - 1$ einsetzt:

$$\mathcal{E}\left(\frac{\lambda_2-u_2-v_2+1}{2}\right)=\mathcal{E}\left(\frac{3-2\alpha'}{2}\right)=0,\quad \mathcal{E}\left(\frac{-\lambda_2+u_2-v_2+1}{2}\right)=\mathcal{E}\left(\frac{1-2\beta'}{2}\right)=0,$$

$$\left\{\text{wegen } \alpha'>\tfrac{1}{2}\right\}\qquad \mathcal{E}\left(\frac{-\lambda_2-u_2+v_2+1}{2}\right)=\mathcal{E}\left(\frac{1-2\beta'}{2}\right)=0$$

Also:

Wir haben durch unsern Reductionsprocess das Tripel (λ, u, v) arithmetisch auf ein solches reducirtes Tripel zurückgebracht, welches zu einem Dreieck gehört, das keine sich selbst überschlagende Seite hat.

Das allgemeine Tripel 1. Art λ, u, v hat die Gestalt

$$\lambda=\lambda_2+b+c,\quad u=u_2+c+a,\quad v=v_2+a+b.$$

Wir bekommen alle Tripel 1. Art λ, u, v, wenn wir von denjenigen Tripeln λ_2, u_2, v_2 ausgehen, welche reducirte Dreiecke liefern, von denen keine Seite ihren Kreis ganz umspannt, und wenn wir dann schreiben:

$$\lambda=\lambda_2+b+c,\ u=u_2+c+a,\ v=v_2+a+b$$

unter a, b, c drei beliebige positive ganze Zahlen verstanden.

[Di. d. 14. Feb. 94.]

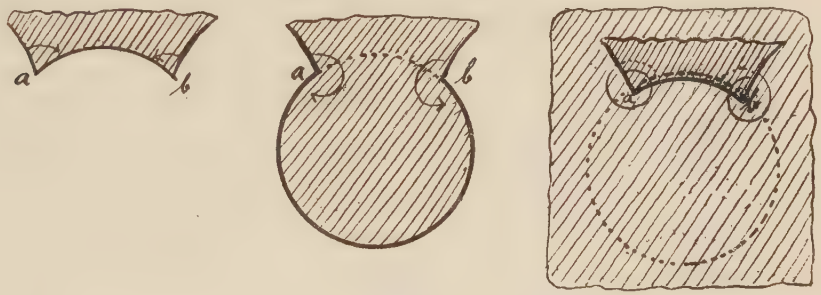
Heute ist es zuerst unsere Aufgabe, durch einen geometrischen Process unser arithmetisches Reductionsverfahren wieder rückwärts zu durchlaufen, d. h. von (λ_2, u_2, v_2) zu dem allgemeinen Dreieck 1. Art

$$\lambda=\lambda_2+b+c,\quad u=u_2+a+c,\quad v=v_2+a+b$$

in geometrischer Form aufzusteigen. Dabei sind einzig die reducirten Dreiecke $\underline{II}^4$ und $\underline{III}^4$ auszuschliessen,

alle anderen aber mitzunehmen.

Dazu dient uns der Process, den wir „laterale Anhängung einer Kreisscheibe" nennen. Ist ab eine Dreiecksseite, die keinen ganzen Kreis umspannt,



so fügen wir, wenn das Dreieck ausserhalb des Kreises liegt, zu dem ab gehört, das Innere dieses Kreises zu der Dreiecksfläche hinzu, wenn das Dreieck auf der Innenseite des Kreises ab liegt, das Äussere des Kreises. Man kann diesen Process beliebig oft wiederholen, indem man abwechselnd das Innere und das Äussere des Kreises ab anhängt.

Die Anschauung lehrt dann:

Die laterale Anhängung einer Kreisscheibe bewirkt, dass die Winkel, welche an die Seite anstossen, um π wachsen, während die Seite in ihr Complement verwandelt wird.

Die exacte Anhängung einer Kreisscheibe an die Seite eines Dreiecks kann beliebig oft wiederholt werden.

Wir haben nun ohne weiteres:

Die Construction des allgemeinen Dreiecks λ, μ, ν erster Art erfolgt so, dass wir bei einem jeden der 13 zulässigen Dreiecke $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$ an der Seite l_2 a Kreisscheiben, an der Seite m_2 b Kreisscheiben, an der Seite n_2 c Kreisscheiben lateral anhängen.

Da sich hierbei die Seiten nur abwechselnd in ihr Complement und wieder in sich selbst verwandeln, so ergibt sich der Satz:

Wir erhalten auf diese Weise lauter Dreiecke, welche keine umlaufenden Seiten haben.

Also haben die Dreiecke 1. Art keine umlaufenden Seiten.

Denn wir bekommen durch unsere Construction ja das allgemeinste solche Dreieck.

In unseren Ergänzungsrelationen, z. B. in

$$\mathcal{E}\left(\frac{l}{2}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right),$$

ist im vorliegenden Falle $\lambda-\mu-\nu$ immer negativ, die rechte Seite also 0, folglich stimmen in der That unsere Ergänzungsrelationen mit den geometrischen Thatsachen überein; sie sind also für alle Dreiecke 1. Art bewiesen. —

Die Dreiecke 1. Art sind hiermit erledigt, indem wir in der Lage sind, uns von jeder einzelnen Dreiecksfläche eine vollständig klare Vorstellung zu machen.

Wir wenden uns also nunmehr zu den Dreiecken 2. Art, die dadurch charakterisirt sind, daß ein Winkel, welcher immer λ heißen möge, nicht kleiner ist, als die Summe der beiden andern Winkel, also

$$\lambda \geqq \mu + \nu.$$

Wir führen wieder zuerst eine arithmetische Reduction aus, welche hier sehr einfach ist: wir setzen nämlich

$$\lambda = \lambda_2 + 2a + b + c, \quad \mu = \mu_2 + c, \quad \nu = \nu_2 + b,$$

wobei wir erst b und c so bestimmen, daß

$$0 < \mu_2 < 1 \qquad 0 < \nu_2 < 1,$$

dann a so, daß $0 < \lambda_2 < 2$ ist.

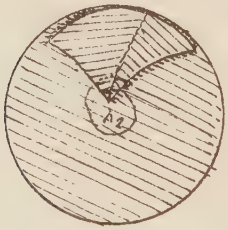
λ_2, μ_2, ν_2 ist dann gewiß ein reducirtes Tripel, das zugehörige Dreieck kann jede der 15 auf S. 405 angegebenen Gestalten haben, nur eine Bedingung ist zu stellen:

<u>Wenn in unserem reducirten Dreieck ein Winkel $> \pi$ ist, so müssen wir ihn λ_2 nennen.</u>

Mit Rücksicht hierauf ist in den Figuren 1) 2) Seite 405 die Benennung willkürlich, in 3) muß notwendig die Ecke b_1, in 4) und 5) die Ecke a_1 mit λ_2 bezeichnet werden.

Um nun vom richtig bezeichneten Dreieck $\lambda_2 u_2 v_2$ zum allgemeinen Dreieck 2. Art $\lambda u v$ aufzusteigen, werden wir erst an die beiden von der Ecke λ_2 auslaufenden Seiten m und n b Kreisscheiben und c Kreisscheiben lateral anhängen, und dann ist noch die Frage, wie wir die gerade Zahl $2a$ einfügen.

Das letztere wird uns im Allgemeinen durch einen bestimmten neuen geometrischen Process gelingen, nämlich durch die „polare Anhängung von Kreisscheiben". Wir denken uns nämlich die der Ecke λ_2 gegenüberliegende Seite zum Vollkreise ergänzt, und fügen nun zu unserm Dreieck, wenn es im Innern dieses Kreises liegt, das Innere, wenn es außerhalb liegt, das Äußere des Kreises hinzu, indem wir es längs eines von λ_2 nach der gegenüberliegenden Seite l_2 reichenden Verzweigungsschnittes mit der bez. Kreisfläche verbinden. Bei dieser „polaren Anhängung" wächst offenbar einerseits die Winkelzahl λ_2, andererseits die Seitenzahl l_2 um 2. Wir sehen also:



Die Einführung der Größe $2a$ in die Formel erreichen wir, indem wir von der Ecke λ_2 aus an unser

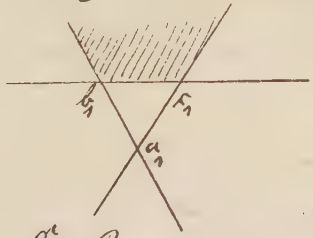
Dreieck a Kreisscheiben polar anhängen, wodurch die gegenüberliegende Seite a mal mehr umlaufend wird, als sie vom Hause aus ist, in Übereinstimmung mit der Ergänzungsrelation.

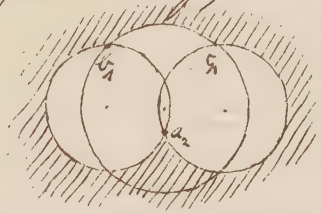
Denn es ist $\varepsilon\left(\frac{l}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\lambda_2-\mu_2-\nu_2+1}{2}\right) + a =$
$= \varepsilon\left(\frac{l_2}{2}\right) + a.$

Wir müssen aber noch genau die Anwendbarkeit des Processes prüfen. In dieser Hinsicht kommt:

Dieser Process der polaren Anhängung ermöglicht sich ohne Weiteres in allen Fällen, außer in II_2 und III_2, falls man unter λ_2 die Ecke a_2 versteht, (welche in II_2 im Unendlichfernen liegt).

II_2





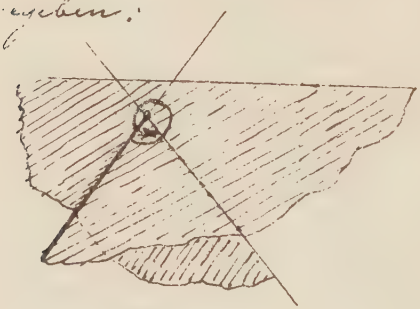
III_2.

Der Process der polaren Anhängung verlangt nämlich, daß die Ecke λ_2 auf derjenigen Seite der Kreislinie l_2 liegt, nach welcher hin die Dreiecksfläche von der Seite l_2 aus sich erstreckt, und diese Bedingung ist in dem Falle II_2 nicht erfüllt, weil die Ecke λ_2 auf dem Kreise l_2 selbst liegt, im Falle III_2 nicht, weil die Ecke λ_2 auf der verkehrten Seite der Kreislinie liegt.

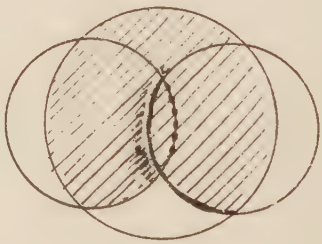
Wir müssen uns also zu diesen beiden Dreiecken $(\lambda_2 u_2 v_2)$ das nächste Dreieck (λ_2+2, u_2, v_2) auf andere Weise als durch solche Anhängung einer Kreisscheibe construiren. Haben wir dies Dreieck λ_2+2, u_2, v_2 einmal gefunden, dann können wir, wie es sich zeigen wird, die weitere Vermehrung von λ_2 um Multipla von 2 wieder durch gewöhnliche polare Anhängung bewerkstelligen.

Um in den beiden schwierigen Fällen die Größe 2n in die geometrische Construction hineinzubringen werden wir zuerst das „Zwischendreieck" λ_2+2, u_2, v_2 aufsuchen und von da aus durch $(a-1)$ malige polare Anhängung weitergehen, was keine Schwierigkeiten hat.

Die beiden Zwischendreiecke sind, wie man sich leicht übergeugt, durch folgende Figuren gegeben:



II, 2'



III, 2'

Bei der ersten Figur ist die dem Winkel $\lambda_2 + 2$ gegenüberliegende Seite gerade einmal umlaufend, bei der zweiten Figur umspannt sie nur einen Teil der sie tragenden Kreisbahn.

Beides stimmt mit unserer Ergänzungsrelation: Indem wir jetzt in beiden Fällen von der Ecke $\lambda_2 + 2$ aus $(a-1)$ Kreisscheiben polar einhängen vermehren wir die Umlaufzahl der gegenüberliegenden Seite je um $(a-1)$, – wieder in Übereinstimmung mit unserer Ergänzungsrelation. –

Damit haben wir nun auch alle Dreiecke λ, μ, ν der zweiten Art construirt. [Do. d. 15. Feb. 94]

Insbesondere hat sich durch Betrachtung aller einzelnen Fälle die allgemeine Richtigkeit der Ergänzungsrelation ergeben.

Heute will ich kurz, in tabellarischer Weise, angeben, wie die Verhältnisse bei ganzzahligen Exponentendifferenzen der η Function sich stellen, bezüglich aller Einzelheiten verweise ich auf die Schilling'sche Arbeit selbst.

An einer Stelle mit ganzzahliger Exponentendifferenz λ liegt entweder ein Ausnahmepunkt 1. Ordn. oder ein Ausnahmepunkt 2. Ordn. vor. An einem solchen erster Art gibt es einen Partikular-

Zweig mit der Entwicklung

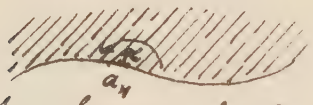
$$\eta_0 = (x-a)^{-\lambda} \varphi(x-a) + \log(x-a),$$

an einem solchen 2. Ordnung einem Partikularzweig

$$\eta_0 = (x-a)^{-\lambda} \varphi(x-a)$$

Es ist zu untersuchen, wie diese Partikularlösungen, und darauf, wie die allgemeine Lösung η die Umgebung der Stelle a abbildet, insbesondere, wie sich das durch a gehende Stück der reellen Axe in der η-Ebene darstellt. Ich behaupte:

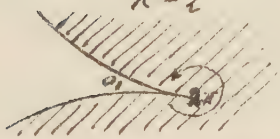
In der η-Ebene bekommen wir*) ein Kreisbogendreieck, von welchem zwei Seiten in der Ecke a_1 unter dem ganzzahligen Winkel $\lambda\pi$ zusammenstoßen. Diese Kreisbogenseiten gehören im Falle des Auftretens logarithmischer Glieder verschiedenen Kreislinien an, im Falle, daß kein logarithmischer Glied vorkommt, gehören sie derselben Kreislinie an:



Ausnahmepunkt 1. Ordn.

Ausnahmep. 2. Ordnung.

$\lambda = 2$



Ausnahmep. 1. Ordnung.

Ausnahmepunkt 2. Ordnung

*) λ, μ, ν natürlich reell vorausgesetzt.

Ist speciell $\lambda = 0$, so ist nur eine Figur möglich, mit zwei, notwendig verschiedenen Kreislinien angehörenden Bogen:

In der That wissen wir auch von früher, daß für $\lambda = 0$ notwendig ein logarithmisches Glied vorkommen muß, daß es also in diesem Falle keinen Ausnahmspunkt 2. Ordnung gibt. —

Jetzt wollen wir nun solche Dreiecke näher betrachten, bei welchen Winkel der eben beschriebenen Art vorkommen, bei welchen also ein oder mehrere der Zahlen λ ganze Zahlen oder Null sind. Wir werden jedesmal ein Minimaldreieck zeichnen, von welchem man durch geometrische Processe zu allgemeineren Dreiecken gelangt. Dabei werden wir hier davon absehen, auf die Reihenfolge der Winkel zu achten, insofern wir doch nicht in's Einzelne gehen.

Nach der Anzahl der ganzzahligen Dreieckswinkel unterscheiden wir folgende drei Kategorien:

1.) Ein Winkel ganzzahlig; dieser sei λ.
2.) Zwei Winkel ganzzahlig; λ, μ.
3.) Alle Winkel ganzzahlig.

Unter jeder dieser 3 Nummern haben wir den

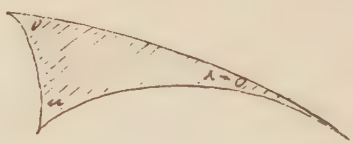
Fall II der geradlinigen Dreiecke, welcher durch eine Gleichung:

$$\pm \lambda \pm \mu \pm \nu = 2r + 1$$

charakterisirt ist, von dem zu I oder III gehörigen allgemeinen Fall zu unterscheiden.

1.) Ein Winkel λ ganzzahlig.

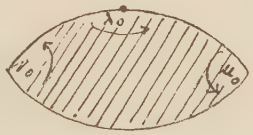
a.) Im allgemeinen Fall ist im Minimaldreieck ein Winkel $= 0$, die Summe der beiden andern $< \pi$, so daß wir also den Fall III vor uns haben, wo sich die drei Axen des Kerns außerhalb der Kugel schneiden. Die eine derselben berührt die Kugel, die beiden andern durchsetzen sie.



Falls kein Fall II vorliegt, haben wir einen Fall III, bei welchem nur der eine Winkel des Minimaldreiecks $= 0$ geworden ist.

b.) Im Falle II möge die Benennung der Winkel so gewählt sein, daß $\mu \geqq \nu$ ist. Dann hat man zu unterscheiden, ob eine der beiden Zahlen $\lambda - \mu \pm \nu$ eine positive ungerade Zahl ist, oder nicht, im ersteren Fall ist λ ein Ausnahmepunkt 2. Ordnung, andernfalls ein solcher 1. Ordnung. So haben wir die Regel früher auf analytischem Wege abgeleitet.

Wenn $\lambda - u \pm v = 2r+1$ ist, so ist das Minimaldreieck in ein Zweieck ausgeartet, indem zwei Ebenen und zwei Kanten des Kerns zusammengefallen sind. Der Mittelpunkt des Kerns wird unbestimmt, jeder Punkt des durch u_0 und v_0



gehenden Kugeldurchmessers kann als solcher angesehen werden.

Wenn aber die Bedingung $\lambda - u \pm v = 2r+1$ nicht erfüllt ist, so ist λ ein Ausnahmepunkt erster Ordn., und das Minimaldreieck ist ein Dreieck von der Gestalt der nebenstehenden Figur.

Der Kern ist hier wohlbestimmt; die drei Ebenen desselben schneiden sich im Punkte ∞ der Kugel, zwei derselben längs einer Tangente der Kugel.

Wir haben also bei einem ungraden Winkel im Falle II zwei ganz verschiedene Kerne zu betrachten; dies ist für die Theorie der verwandten Funktionen besonders wichtig:

Es seien $\lambda_0\, u_0\, v_0$ etwa die Winkel eines zum erste. Kern gehörenden Minimaldreiecks, also $\lambda_0 = 1, u_0 = v_0$. Bilden wir uns nun das Winkeltripel, wie es zu einem Nebendreieck gehören sollte:

$\lambda_1 = 1 - \lambda_0 = 0$, $\mu_1 = 1 - \mu_0 = 1 - \nu_0$, $\nu_1 = \nu_0$, so zeigt sich, daß wir im Dreieck mit diesen Winkelzahlen nicht im ersten, sondern nur beim zweiten Kern finden.

Also:

Die Theorie der verwandten Functionen wird im vorliegenden Falle noch gar nicht bestimmt dadurch, daß wir verlangen, die Winkelzahlen der beiden Dreiecke sollen sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, deren Summe gerade ist, sondern es kommen da noch Fallunterscheidungen hinzu, welche im Einzelnen zu untersuchen bleiben.

2. Zwei Winkel λ, μ ganzzahlig.

Hier ist der Fall $k = \pm\lambda \pm \mu \pm \nu = 2\nu + 1$ von vornherein ausgeschlossen, weil in diesem Falle aus der Ganzzahligkeit zweier Winkel auch die Ganzzahligkeit des dritten Winkels folgt, worauf das Dreieck bei unter 3) gehört.

Alle unter 2) gehörigen Dreiecke gehören zum Falle II, das Minimaldreieck hat die Winkel $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 < 1$. Zwei Kanten des Kerns berühren die Kugel, die dritte durchsetzt sie.

3. Alle Winkel ganzzahlig.

Hier ist zu unterscheiden, ob die Winkelsumme $\lambda + \mu + \nu$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Fortsetzung,

von Seite 430 bis Seite 434.

(Ebenso wie $\lambda+\mu+\nu$ verhält sich bei ganzzahligen λ, μ, ν auch jeder andere Ausdruck $\pm\lambda \pm \mu \pm \nu \bmod 2$; hierin liegt, daß wir uns im vorliegenden Falle auf die Betrachtung der Summe $\lambda+\mu+\nu$ beschränken dürfen.)

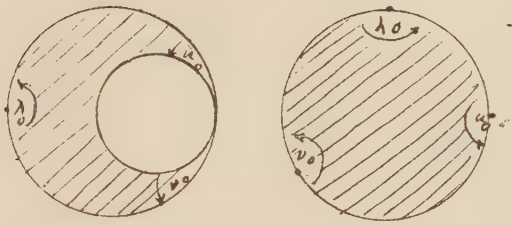
Ist $\lambda+\mu+\nu$ gerade, so liegt der allgemeine Fall vor, ist $\lambda+\mu+\nu$ eine ungerade Zahl, so haben wir den Fall II. Ist $\lambda+\mu+\nu = 2r$, so hat das Minimaldreieck die Winkel $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 0$, $\nu_0 = 0$. Die drei Kanten des Kerns schneiden sich außerhalb der Kugel;

der Kern gehört also zum Falle III.
Das Minimaldreieck ist nichts anderes, als das bekannte Dreieck der elliptischen Modulfunctionen, auf welches die positive Halbebene des Moduls k^2 durch den Quotienten ω zweier Perioden des elliptischen Integrals abgebildet wird.

Ist $\lambda+\mu+\nu = 2r+1$, so muß man zwischen Tripeln 1. Art: $\lambda < \mu+\nu$ und Tripeln 2. Art $\lambda > \mu+\nu$ unterscheiden ($\lambda = \mu+\nu$ ist ausgeschlossen, weil sonst $\lambda+\mu+\nu = 2r$ wäre).

Das Minimaldreieck für ein Tripel 2. Art ist eine Sichel mit zwei Winkeln $= 0$ und einem auf dem einen Sichelrande liegenden Winkel π, das Minimaldreieck für ein Tripel 1. Art dagegen ist einfach eine Kreisscheibe mit drei Winkeln π auf dem Rande.

Im ersten Falle fallen zwei Ebenen des Kerns in eine zusammen, im zweiten Falle alle drei. Also:



Bei dem Tripel 2. Art ist der Mittelpunkt des Kerns unbestimmt auf einer Tangente der Kugel, bei dem Tripel 1. Art ist er unbestimmt in einer Ebene.

Damit schliesse ich ab, was ich heute über ganzzahlige Exponenten sagen wollte. Anhangsweise will ich noch einen Grenzfall der hypergeometrischen Function für unendlich grosse Exponenten berühren, nämlich den Fall der Bessel'schen Functionen.

Wegen der allgemeinen Frage der Grenzfälle vergl. wieder die Arbeit von Schilling. Man erhält diese, wie wir Mitte Januar ausführten, aus der P-Function, wenn man die zweiten und dritten Exponenten in gewisser Weise unendlich werden läßt, indem man gleichzeitig die entsprechenden Verzweigungspunkte zusammenrücken läßt.

Wir könnten einer Besselschen Function etwa das Schema geben:

$$\mathcal{P}\left|\begin{array}{ccc} a & b = c & \\ +n & +\infty & +\infty \\ -n & -\infty & -\infty \end{array}\ z\right|$$

N.B. unbeschadet des Satzes, dass die Summe der 6 Exponenten gleich 1 sein soll.

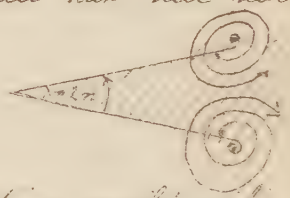
Der Quotient zweier Zwerge würde das Schema haben.

$$\eta(2n, \infty, \infty, x)$$

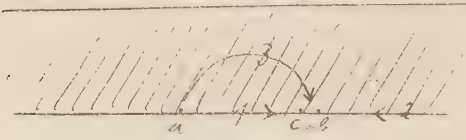
Es ist also $\lambda = 2n$, $\mu = \infty$, $\nu = \infty$. Wie haben wir uns das zugehörige Dreieck vorzustellen?

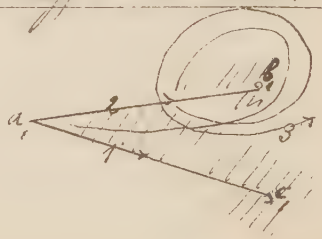
Die Bessel'sche Function hat ein Dreieck mit zwei unendlich großen Winkeln.

Ein solches mit zwei beliebig großen Winkeln können wir uns aber aus einem gewöhnlichen Dreieck immer herstellen, indem wir an ein und dieselbe Seite beliebig viele Kreisscheiben anhängen. Wiederholen wir das unendlich oft, so verschwindet die betreffende Seite vollständig aus dem Gesichtskreis, und man hat nur noch in den Endpunkten der gewesenen Seite je einen Windungspunkt unendlich hoher Ordnung.



Das Dreieck der Bessel'schen Funktion ergibt sich aus einem gewöhnlichen Dreieck durch unendlich oft wiederholte laterale Anhängung einer Kreisscheibe wobei zwei Windungspunkte unendlich hoher Ordnung entstehen und die dritte Dreiecksseite in Wegfall kommt.





Des Näheren haben wir uns die Verhältnisse der conformen Abbildung folgendermaßen zu denken.

Bewegen wir uns von dem Punkte a der x-Ebene längs der reellen Axe in der positiven Richtung (1) nach dem Punkte $c=b$, so kommen wir in der η-Ebene längs der Dreiecksseite $a_1 c_1$ in den Punkt c_1, bewegen wir uns aber in negativer Richtung (2) nach demselben Punkte $c=b$, so kommen wir in der η-Ebene nach b_1, bewegen wir uns aber in einer beliebigen anderen Richtung auf denselben Punkt zu, so läuft der entsprechende Weg der η-Ebene unendlich oft zwischen den beiden Windungspunkten hindurch, ohne sich einem bestimmten Punkte zu nähern. Der Punkt $b=c$ ist nämlich ein irregulärer Punkt der Differentialgleichung geworden, und ein wesentlich singulärer Punkt für das allgemeine Integral derselben. Die Function η hat in diesem Punkte überhaupt keinen bestimmten Werth. Wir sagen:

Besonders interessant ist dabei die Abbildung des irregulären Punktes, in welchem b und c zusammengefallen sind, und es ergibt sich die allgemeine Aufgabe, die Natur der wesentlich singulären Punkte analytischer Functionen allgemein mit Hülfe der conformen Abbildung zu studiren.

[Fr. d. 16 Febr. 94.]

Wir wenden uns jetzt dazu, die functionentheoretische Bedeutung unserer Dreiecksfiguren zu besprechen, – es wird dies ein schönes Beispiel sein, was man überhaupt mit der geometrischen Behandlung functionentheoretischer Probleme erreichen kann.

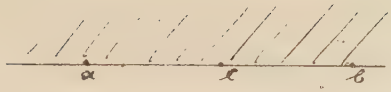
Wir werden die Betrachtungen insbesondere nach zwei Richtungen ausführen:

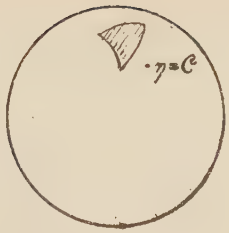
1.) Das Kreisbogendreieck der η-Ebene, für sich genommen, gibt ein übersichtliches Bild für den Verlauf des einzelnen particulären Zweigs der η-Function als Function von x.

2.) Das Princip der Symmetrie liefert uns fernerhin die analytische Fortsetzung, also den Gesamtverlauf der Function.

Heute beschäftigen wir uns nur erst mit der Frage nach dem Verlauf des einzelnen Zweiges der Function. Wir fragen: wie oft nimmt der Ausgangszweig $\eta(x)$ irgend einen bestimmten Wert C in der positiven Halbebene x an? d.h. wie viele Wurzeln besitzt die Gleichung

$\eta(x) = C$? – N. in der positiven Halbebene x





Es ist einfach die Frage, wie oft die Stelle $\eta = C$ auf der η-Kugel von der Membran des Dreiecks überspannt wird?

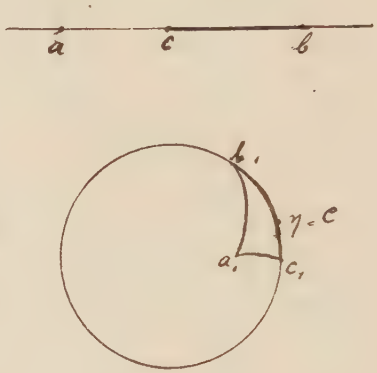
Indem wir unser Dreieck λ, μ, ν in jedem Falle genau construiren können, werden wir auf die so formulirte Frage allemal eine präcise Antwort finden. Um aber etwas Allgemeines zu sagen, möge unser Dreieck λ, μ, ν aus einem reducirten Dreieck $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$ durch Anhängung von $A\ B\ C$ Kreisscheiben an die drei Seiten l, m, n entstehen. Jedesmal die Anhängung zweier Kreisscheiben an eine Seite ist aber einfach die Anhängung einer ganzen Kugelfläche, wodurch der Punkt $\eta = C$ gewiss einmal überdeckt wird. Wir haben solcherweise im Ganzen $\mathcal{E}\left(\frac{A}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{B}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{C}{2}\right)$ Vollkugeln angehängt, haben also den Satz:

Im vorliegenden Falle hat die Gleichung $\eta(\omega) = C$ mindestens $\mathcal{E}\left(\frac{A}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{B}{2}\right) + \mathcal{E}\left(\frac{C}{2}\right)$ Wurzeln.

Bei specieller Lage kann die Gleichung natürlich auch mehr Wurzeln haben, z. B. wenn C im Ausgangs-

druck selbst gewählt ist.

Hieran schließt sich die Fragestellung, welche ich 1890 in Math. Ann. Bd. 37 behandelt habe. Wir denken uns die Halbebene mit den drei auf dem Rande gelegenen Verzweigungsstellen a, b, c, und wählen einen solchen Zweig der η-Function aus, der zwischen b und c reelle Werte hat. Wir fragen nun nach der Anzahl der reellen Wurzeln, welche die Gleichung



$$\eta(x) = C',$$

unter C' eine reelle Constante verstanden, auf dem Segment bc besitzt.

Das η Dreieck wird so auf der Kugel orientirt sein, daß seine Seite l auf dem Meridian der reellen Zahlen liegt. Der Punkt C' liegt ebenfalls auf dem Meridian der reellen Zahlen, und es kommt unsere Frage nun darauf hinaus, zu untersuchen, wie oft auch die Seite l über den Punkt $\eta = C'$ hinzieht. Da ist nun klar, daß, so oft die Seite l den ganzen Kreis überdeckt, so oft mindestens auch der Punkt C' überstrichen werden muß, wo er auch liegen

mag; doch kann er noch einmal öfter überschritten werden, wenn er nämlich so gewählt ist, daß er auch auf der Seite des reducirten Dreiecks liegt. Die Anzahl der ganzen Umläufe der Seite l können wir aber auf Grund unserer vorhergehenden geometrischen Untersuchungen durch die Winkelzahlen ausdrücken. Wir erhalten so den Satz:

Die reelle Gleichung $\eta(x) = C$ hat für den ausgewählten Particularzweig im Intervall bc so viele reelle Wurzeln, als der Ausdruck

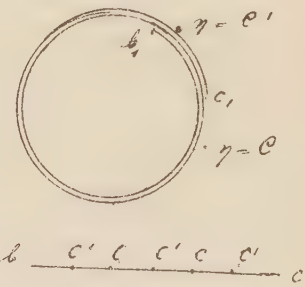
$$E\left(\frac{\lambda - u - v + 1}{2}\right) + \varepsilon$$

angibt. Dabei bedeutet ε Null oder Eins, je nach der Lage des Punktes C.

Wir können aus der Figur noch mehr ablesen. Es seien zwei Gleichungen

$$\eta(x) = C \quad \text{und} \quad \eta(x) = C'$$

gegeben. Die Seite l muß offenbar beim Umlaufen ihres Kreises immer abwechselnd über den Punkt C und den Punkt C' laufen, niemals zweimal hintereinander über denselben Punkt. Das heisst:



Die reellen Wurzeln der beiden reellen Gleichungen

$$\eta(x) = C, \quad \eta(x) = C'$$

folgen im Intervall bc abwechselnd aufeinander.

(Die Sache würde sofort anders, wenn die Seite l einen Umkehrpunkt trüge, – entsprechend einem auf dem Segment bc der reellen Axe gelegenen Nullpunkte. Wir werden allgemein verlangen, die Bedingungen des Satzes auf η-Funktionen mit irgendwelchen Nullpunkten auszudehnen.)

Diese Aussage gewinnt nun noch viel höheres, besonders physikalisches Interesse, wenn wir zu der ursprünglichen linearen Differentialgleichung 2. Ordn. zurückgehen: Nämlich:

Die Wurzeln der Gleichung $\eta = C$ sind die 0 Stellen der Differenzlösung $y_1 - Cy_2$.

Die Function $y = y_1 - Cy_2$ wird nun durch eine Curve dargestellt, welche ein oder mehrere 0-Stellen besitzt, zwischen welchen Oscillationen ausführt. Die 0 Stellen der Function sind die Stellen, wo die Curve die x-Axe schneidet, die Zahl der Nullstellen gibt also im Wesentlichen die Zahl der Oscillationen (oder der Halboscillationen) an. Dabei haben wir jetzt den Satz, daß die 0-Stellen zweier verschiedener Partikularlösungen $y_1 - Cy_2$ und $y_1 - C'y_2$ einander separiren.

Daß die 0-Stellen zweier Particularlösungen $y_1 - Cy_2$ und $y_1 - C'y_2$ im Intervall der Zahl nach bis auf etwa eine Einheit übereinstimmen und sich übrigens wechselseitig separiren daß ist aus der mathematischen Physik bekannt (Sturm, Liouv. Bd. I. 1836). Vermöge unserer Betrachtung der η-Function bestätigen wir dieses Resultat, gehen aber weiter, indem wir die notwendige Zahl der 0-Stellen einer Lösung im Intervall wirklich angeben; dieselbe ist nämlich $\varkappa = E\left(\frac{\lambda - \mu - \nu + 1}{2}\right)$, wobei dann für die einzelne Particularlösung diese notwendige Zahl der Nullstellen noch um eine Einheit überschritten werden kann.

In Math. Ann. 37 habe ich einen speciellen Fall dieses Theorems besonders herausgearbeitet, indem ich dasselbe auf den Fall der hypergeometrischen Reihe

$$F(a, b, c, x)$$

anwendete. Letztere ist eine Particularlösung einer Differentialgleichung mit den Exponentendifferenzen

$$\lambda = |a-b|, \quad \mu = |c-a-b|, \quad \nu = |1-c|$$

und zwar gerade eine solche, welche im dem Intervall $cb = 01$ reell ist.

Die Gesamtzahl der 0-Stellen der hypergeometrischen Reihe im Intervall von 0 bis 1 ist also durch den Ausdruck gegeben

$$\mathfrak{E}\left(\frac{|a-b|-|c-a-b|-|1-c|+1}{2}\right)+\varepsilon,\ \left\{\begin{matrix}\varepsilon=0\\ \text{oder}\\ =1\end{matrix}\right\}$$

Hier wird übrigens, wegen des Verhaltens der η-Function in den singulären Punkten 0 und 1 $\mathfrak{E}$ als diejenige größte nicht negative Zahl definirt werden müssen, welche von dem beigesetzten Argumente überschritten wird. Ich verweise wegen der genaueren Betrachtung auf meine Darstellung in Annalen 37.

Die Zahl ε bestimmt man durch folgende Überlegung: Für $x=0$ ist $\mathfrak{F}=1$, also positiv. Man untersuche nun, ob $\mathfrak{F}$ für $x=1$ positiv oder negativ ist, was man mit Hülfe des Ausdruckes von $\mathfrak{F}(1)$ durch Γ-Functionen ausführen kann, ev. ob $\mathfrak{F}$ für $x=1$ positiv oder negativ unendlich wird. Hat nun $\mathfrak{F}(1)$ dasselbe Vorzeichen wie $\mathfrak{F}(0)$, so muß zwischen 0 und 1 eine gerade Zahl, ist das Vorzeichen das entgegengesetzte, eine ungerade Anzahl von reellen Wurzeln liegen. Wir haben also die Regel:

Je nachdem $\mathfrak{F}$ bei $x=1$ positiv oder negativ ist, wird im Intervall eine gerade oder eine ungerade Anzahl von 0-Stellen liegen. Man wird nun

$\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$ nehmen, je nachdem ε modul 2 genommen bereits den richtigen Charakter hat oder nicht.

Dieses Resultat, welches damals neu war, hat unmittelbar darauf Hurwitz rein analytisch durch Sturm'sche Functionen abgeleitet (Math. Ann. 38. 1890).

Es wäre interessant, Hurwitz' Methode Schritt für Schritt mit der unsern zu vergleichen. Übrigens umschliesst unser Resultat eine grosse Zahl in der Litteratur vorliegender Einzelsätze. Wir wollen hier in dieser Richtung nur einen speciellen Fall betrachten, nämlich den Fall der gewöhnlichen Kugelfunctionen, oder der Legendre'schen Polynome.

Dies sind abbrechende hypergeometrische Reihen folgender Gestalt:

$$\mathcal{H}^{2n} = \mathcal{F}(n+\tfrac{1}{2}, -n, \tfrac{1}{2}, x^2),$$

$$\mathcal{H}^{2n+1} = x\,\mathcal{F}(n+\tfrac{3}{2}, -n, \tfrac{3}{2}, x^2)$$

Für die erste ist $\lambda = 2n+\frac{1}{2}$, $\mu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$,

für die zweite $\lambda = 2n+\frac{3}{2}$, $\mu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$.

Die Zahl der 0-Stellen der $\mathcal{F}$-Reihe als Function von x^2 im Intervall von $x^2 = 0$ bis $x^2 = 1$ ist also in beiden Fällen gleich:

$$\mathcal{E}\left(\frac{\lambda-\mu-\nu+1}{2}\right) = \mathcal{E}(n+\tfrac{1}{2}) \text{ bezw. } = \mathcal{E}(n+1), \text{ d.h.}$$

beidemal $= n$.

Hiernach besitzen unsere Reihen als Functionen von x im Intervall von -1 bis $+1$ beide $2n$ Nullstellen, also H^{2n} $2n$ 0-Stellen, H^{2n+1} $(2n+1)$ 0-Stellen {wegen des vorgesetzten Factors x}. $2n$ und $2n+1$ sind aber gerade der Grad von H^{2n} und H^{2n+1}.

Diese Polynome besitzen also überhaupt nur $2n$ bezw. $2n+1$ 0-Stellen, die wir somit alle in dem Intervall von -1 bis $+1$ vorgefunden haben. Also:

Ein Beispiel für die Anwendung unserer Formel geben die Legendre'schen Polynome, bei denen man findet, daß alle Nullstellen reell sind und zwischen $x=-1$ und $x=+1$ liegen.

(Mo. d. 19. Febr.)

In der letzten Stunde haben wir für die einzelne P-Function gewisse Realitätstheoreme aus der Gestalt des zugehörigen Kreisbogendreiecks erschlossen. Ganz ähnliche Theoreme lassen sich aus unserer geometrischen Theorie über die Beziehung zwischen verschiedenen verwandten P-Functionen ableiten.

Es seien η und η' zwei correspondirende Zweige verwandter η-Functionen, d. h. so ausgewählte Zweige, daß sie bei gleichen Wegen der Variablen x die gleichen Substitutionen erfahren; dieselben bilden dann die positive x-Halbebene auf zwei zum selben Kern gehörige Dreiecksflächen mit gleicher

Kantenaufeinanderfolge ab.

η und η' sind Quotienten je zweier Zweige verwandter $\mathcal{P}$-functionen:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_1}{\mathcal{P}_2}, \qquad \eta' = \frac{\mathcal{P}_1'}{\mathcal{P}_2'},$$

wobei $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$, andererseits $\mathcal{P}_1'$ und $\mathcal{P}_2'$ bei gleichen Umläufen von x je dieselben binären linearen Substitutionen erfahren.

Aus dieser Eigenschaft folgt, wie wir früher bemerkten, daß die Determinante

$$\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2' - \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1'$$

eine multiplicative Function von x von der Gestalt ist:

$$(x-a)^{\sim}(x-b)^{\sim}(x-c)^{\sim} \cdot \varphi(x),$$

unter $\varphi(x)$ eine rationale ganze Function von x verstanden.

Die nähere Bestimmung dieser rationalen Function von x haben wir vor Weihnachten nicht ausgeführt; dies wollen wir wenigstens heute in Rücksicht auf den Grad nachholen, um dann nachzusehen, was wir etwa über die 0 Stellen derselben aus der Gestalt und Lage der beiden zu η und zu η' gehörigen Kreisbogendreiecke aussagen können.

Dabei wird es bequem sein, die Functionen $\mathcal{P}$,

so wie wir es bereits vor Weihnachten andeuteten, durch homogene Functionen, d.h. Formen von x_1, x_2 zu ersetzen.

Aus einer Function

$$\mathfrak{P}\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{matrix}\; x\right|, \quad \begin{matrix} \lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2=1 \\ \lambda_1-\lambda_2=\lambda,\ \mu_1-\mu_2=\mu,\ \nu_1-\nu_2=\nu, \end{matrix}$$

setzen wir etwa, um sie zu normiren, eine multiplicative Form derart heraus, daß in der übrigbleibenden Π-Form die zweiten Exponenten jedes Punktes verschwinden. Wir setzen also:

$$\mathfrak{P}\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \end{matrix}\; x\right| = (xa)^{\lambda_2}(xb)^{\mu_2}(xc)^{\nu_2}\,\Pi\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\; x_1, x_2\right|.$$

Der Grad der Form Π ist, da der Grad der ganzen rechten Seite $=0$ sein muß, natürlich $=-\lambda_2-\mu_2-\nu_2$, welcher Ausdruck sich mit Rücksicht auf die Gleichung $\lambda_1+\lambda_2+\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2-1=0$ in die Gestalt setzen läßt:

$$\frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2}.$$

Nun betrachten wir zwei verwandte Π-Formen, d.h. solche, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen von gerader Summe unterscheiden, etwa

$$\Pi\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\; x_1, x_2\right| \text{ und } \Pi'\left|\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda\pm\mathfrak{L} & \mu\pm\mathfrak{M} & \nu\pm\mathfrak{N} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\; x_1, x_2\right|,$$

wobei $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ positive ganze Zahlen sein sollen, die der Relation

$$\mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N} \equiv 0 \pmod 2$$

genügen. Die Vorzeichen $\pm$ dieser Zahlen können unabhängig voneinander gewählt sein, so daß, unter $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Zahlen verstanden, welche jede unabhängig von den andern $= +1$ oder $= -1$ sein können, die zweite Form sich schreibt:

$$\Pi' \left| \begin{matrix} a & b & c \\ \lambda + \varepsilon \mathcal{L} & \mu + \varepsilon' \mathcal{M} & \nu + \varepsilon'' \mathcal{N} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad x_1, x_2 \right|.$$

Der Grad der ersten Π-Form ist, wie schon oben gesagt

$$\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2},$$

derjenige der Form Π':

$$\frac{\lambda + \mu + \nu + \varepsilon \mathcal{L} + \varepsilon' \mathcal{M} + \varepsilon'' \mathcal{N} - 1}{2}.$$

Der Grad der Determinante

$$\Pi_1 \Pi_2' - \Pi_1' \Pi_2$$

als Form von x_1, x_2 ist also:

$$\lambda + \mu + \nu - 1 + \frac{\varepsilon \mathcal{L} + \varepsilon' \mathcal{M} + \varepsilon'' \mathcal{N}}{2}.$$

An der Stelle a verhält sich Π_1 wie $(xa)^\lambda$, Π_2 wie $(xa)^0$, Π_1' wie $(xa)^{\lambda + \varepsilon \mathcal{L}}$, Π_2' wie $(xa)^0$, die Determinante verschwindet also, da ihr erster Teil wie $(xa)^\lambda$, der zweite wie $(xa)^{\lambda + \varepsilon \mathcal{L}}$

sich verhält, von einer Ordnung, die durch die kleinere der beiden Zahlen λ und $\lambda + \varepsilon \mathcal{L}$ angegeben ist. Diese kleinere Zahl heißt, wenn $\varepsilon = +1$ ist, λ, wenn $\varepsilon = -1$ ist, $\lambda - \mathcal{L}$; allgemein kann man sagen, daß die kleinere der beiden Zahlen λ und $\lambda + \varepsilon \mathcal{L}$ sowohl für $\varepsilon = +1$, wie für $\varepsilon = -1$ mit $\lambda + \frac{\varepsilon - 1}{2} \mathcal{L}$ übereinstimmt. Wir werden also von unserer Determinante, welche eine multiplicative Form von x_1, x_2 sein muß, dem Punkte a entsprechend einen Factor $(xa)^{\lambda + \frac{\varepsilon - 1}{2} \mathcal{L}}$ herausetzen, ganz entsprechend für die Punkte b und c, so daß wir also schließlich schreiben:

$$\Pi_1 \Pi_2' - \Pi_1' \Pi_2 = (xa)^{\lambda + \frac{\varepsilon - 1}{2} \mathcal{L}} (xb)^{\mu + \frac{\varepsilon' - 1}{2} \mathcal{M}} (xc)^{\nu + \frac{\varepsilon'' - 1}{2} \mathcal{N}} \varphi(x_1, x_2).$$

Die ganze Determinante hat, wie wir wissen, den Grad

$$\lambda + \mu + \nu - 1 + \frac{\varepsilon \mathcal{L} + \varepsilon' \mathcal{M} + \varepsilon'' \mathcal{N}}{2},$$

der abgesonderte Teil den Grad

$$\lambda + \mu + \nu + \frac{\varepsilon \mathcal{L} + \varepsilon' \mathcal{M} + \varepsilon'' \mathcal{N}}{2} \quad \frac{\mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N}}{2}$$

Die Form $\varphi(x_1 x_2)$ hat daher in allen Fällen den Grad:

$$\frac{\mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N}}{2} - 1$$

$\varphi(x_1 x_2)$ ist, wie man leicht sieht, überall unverzweigt, und von algebraischem Verhalten, und da eine derartige multiplicative Form

notwendig rational sein muß, da sie ferner in unserm Falle auch keine Unendlichkeitsstellen haben kann, so haben wir den Satz:

<u>$P(x_1, x_2)$ ist eine rationale ganze Form vom Grade</u>

$$\frac{L + M + N}{2} - 1.$$

In der That ist dieser Grad immer eine ganze Zahl, da ja oben die Voraussetzung gemacht werden mußte, daß

$$L + M + N \equiv 0 \pmod{2}.$$

Nun kommen wir zur Anwendung unserer Theorie der verwandten Kreisbogendreiecke. Wir fragen uns nämlich, ob wir nicht von dieser Lehre aus etwas über die Lage der 0-Stellen der ganzen rationalen Form $P(x_1, x_2)$ aussagen können? Insbesondere wie viele reelle 0-Stellen auf den einzelnen Segmenten bc, ca, ab der reellen x-Axe liegen mögen?

Es ist diese Frage bereits in der Litteratur berührt, indem Gegenbauer in Wien ein Theorem angegeben hat, nachdem man unter gewissen Umständen etwas über die Realität der 0-Stellen von P aussagen kann.

Wir wollen hier durchaus nicht das Problem

in seiner ganzen Allgemeinheit erledigen, sondern wollen von allen den vielen zu unterscheidenden Fällen nur zwei besondere Fälle herausgreifen.

Wir recapituliren:

Es ist die Aufgabe, aus der Gestalt und gegenseitigen Lage der beiden Dreiecke η und η' etwas über die Wurzeln der Gleichung $\varphi = 0$ abzulesen.

Wir bilden uns die Differenz der beiden correspondirenden η-Functionen

$$\eta - \eta' = \frac{\pi_1 \pi_2' - \pi_2 \pi_1'}{\pi_2 \pi_2'} = \frac{(xa)^{\lambda + \frac{\varepsilon - 1}{2}\mathcal{L}} (xb)^{\mu + \frac{\varepsilon' - 1}{2}\mathcal{M}} (xc)^{\nu + \frac{\varepsilon'' - 1}{2}\mathcal{N}}}{\pi_2 \pi_2'} \cdot \varphi(x_1, x_2).$$

Wir sehen aus diesem Ausdrucke, daß die Differenz $\eta - \eta'$ einerseits ev. in den Punkten a, b, c selbst verschwindet, (wenn nämlich der betr. Exponent von (xa), (xb), (xc) positiv ist), andererseits an den 0 Stellen der Form $\varphi(x_1, x_2)$; denn ein Unendlichwerden von π_2 oder π_2' an andern Stellen als höchstens bei a, b, oder c ist ausgeschlossen.

Es wird also darauf ankommen, in unsern beiden Dreiecken abgesehen von den Ecken solche Stellen zu finden, für welche $\eta - \eta'$ verschwindet. Es muß im Ganzen

$$\frac{\mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N} - 1}{2}$$

solche Stellen geben.

Indem wir uns insbesondere für die reellen Wurzeln von $\varphi = 0$ und für deren Lage in den drei Intervallen der x-Axe interessiren, wollen wir in unseren Figuren nachsehen, wie viel Punkte es auf den verschiedenen Dreiecksseiten gibt, in denen $\eta = \eta'$ ist.

Wie schon gesagt, werden wir nur zwei spezielle Fälle herausgreifen, die als typische Beispiele gelten können.

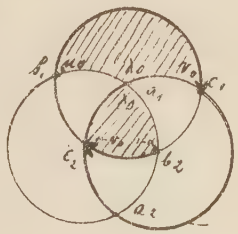
1.) Wir gehen von folgenden beiden verwandten Π-Formen aus:

$$\Pi \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0 & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix} \right| \text{ und } \Pi' \left| \begin{matrix} a & b & c & \\ \lambda_0 & \mu_0 - 1 & \nu_0 - 1 & x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 & \end{matrix} \right| ,$$

in denen λ_0, μ_0, ν_0 positive Zahlen sein sollen, die den Ungleichungen eines Minimaltripels genügen, und deren Summe zudem > 1 sein soll, so dass wir es mit dem Falle I zu thun haben. Die zugehörigen η-Functionen sind

$$\eta(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, x) \text{ und } \eta'(\lambda_0, 1-\mu_0, 1-\nu_0, x).$$

Die Dreiecke, welche correspondirenden Zweigen entsprechen, liegen in demselben Gerüste von Kreisbogen etwa wie in nebenstehender Figur.



Dabei wollen wir uns an jedem der beiden Dreiecke an jeder Seite noch je eine gerade, aber sonst

beliebige Anzahl von Kreisscheiben angehängt denken, etwa an das erste Dreieck $2a, 2b, 2c$, an das zweite Dreieck $2a', 2b', 2c'$ Kreisscheiben. Wir gelangen so zu den neuen verwandten Π-Formen.

$$\Pi \left| \begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_0+2b+2c & \mu_0+2a+2c & \nu_0+2a+2b, x_1, x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right|$$

und $$\Pi' \left| \begin{matrix} a & b & c \\ \lambda_0+2b'+2c' & \mu_0-1-2a'-2c' & \nu_0-1-2a'-2b' \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \quad x_1, x_2 \right|,$$

und zu den η-Functionen

$\eta(\lambda_0+2b+2c, \mu_0+2a+2c, \nu_0+2a+2c, x)$ und $\eta'(\lambda_0+2b'+2c', 1-\mu_0+2a'+2c', 1-\nu_0+2a'$

Die Zahlen L, M, N, wesentlich positiv, sind die absoluten Werte der Differenzen der entsprechenden Exponenten in den beiden Π-Formen, also

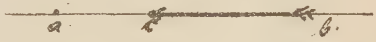
$L = 2|b+c-b'-c'|$, $M = 2(a+c+a'+c')+1$, $N = 2(a+b+a'+b')+$

Die Form $\varphi(x_1, x_2)$ hat also den Grad:

$$\frac{L+M+N}{2} - 1 = |b+c-b'-c'| + (a+c+a'+c') + (a+b+a'+b').$$

Nun sehen wir zu, wie viel 0 Stellen diese Form etwa in dem reellen Intervall bc der x-Axe besitzt, d.h. wie oft $\eta = \eta'$ wird, wenn η als Function von x die Dreiecksseite l seines Dreiecks, η' die Dreiecksseite l' seines Dreiecks durchläuft. Man beachte: Da wir an die beiden reducirten Dreiecke nur gerade Anzahlen von Kreisscheiben lateral angehängt haben, so stimmen die Seiten der Dreiecke genau

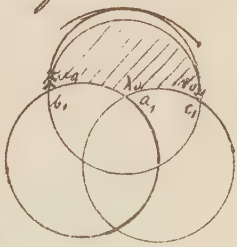
mit denjenigen der auf Seite 453 gezeichneten reducirten Dreiecke überein; wenn also x von b nach c läuft, so bewegt sich η von b_1 nach c_1 auf dem in der Figur stark ausgezogenen Kreisbogen, η' von



b_2 nach c_2 ebenfalls auf dem stark ausgezogenen Kreisbogen. Nun lesen wir aber aus der Figur unmittelbar ab, da die beiden Kreisbogen überhaupt keinen Punkt gemein haben, daß bei dieser Bewegung η nie $= \eta'$ werden kann. Dasselbe gilt, wenn x sich auf einem andern Teile der x-Axe bewegt, denn außer der Ecke a, hat keine Seite des einen Dreiecks einen Punkt mit der entsprechenden Seite des andern Dreiecks gemeinsam. Wir schließen also:

<u>Im vorliegenden Falle hat $\varphi = 0$ überhaupt keine reellen Wurzeln.</u>

2.) Das zweite Beispiel will ich so einrichten, daß der andere extreme Fall eintritt, daß alle Wurzeln reell werden.



Wir bilden uns beide verwandten Π Formen jetzt von demselben reducirten Dreieck λ_0, μ_0, ν_0 ausgehend, indem wir an dasselbe einmal längs m

b Kreisscheiben, längs n c Kreisscheiben lateral anhängen und von λ aus hinüber nach l a Kreisscheiben polar anhängen, das andere Dreieck, indem wir ebensoviel Kreisscheiben lateral, aber a' Kreisscheiben polar anhängen. Die beiden Π-Formen lauten also:

$$\Pi \left| \begin{matrix} a \\ \lambda_0 + 2a + b + c \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b \\ \mu_0 + c \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c \\ \nu_0 + b \\ 0 \end{matrix} \quad x_1 x_2 \right| \text{und}$$

$$\Pi' \left| \begin{matrix} a \\ \lambda_0 + 2a' + b + c \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} b \\ \mu_0 + c \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c \\ \nu_0 + b \\ 0 \end{matrix} \quad x_1 x_2 \right| .$$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ haben hier die Werte

$$\mathcal{L} = 2\,|a - a'|\,, \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{N} = 0,$$

und der Grad von $\varphi(x_1, x_2)$ ist also

$$|a - a'| - 1.$$

Die beiden Dreiecke stimmen in ihren Seiten m und n genau überein, auch die Seiten l liegen zwischen denselben Endpunkten b_1 und c_1 und werden bei Wanderung des x von b nach c im selben Sinne durchlaufen; der Unterschied ist aber der, daß im ersten Dreieck die Seite a mal, im zweiten Dreieck a' mal ihren ganzen Kreis umläuft. Wenn aber zwei Punkte η und η' auf einer Kreislinie zwischen denselben Endpunkten der eine a mal, der andere a' mal umlaufen, so muß der eine den ande

wie man unmittelbar geometrisch sieht, mindestens $(|a-a'|-1)$ mal überholen; d. h. es muß mindestens $|a-a'|-1$ Stellen im Intervall bc der x-Axe geben, an denen $\eta=\eta'$ wird, also $\varphi(x_1, x_2)$ verschwindet. Nun kann aber $\varphi(x_1, x_2)$ überhaupt nur $(|a-a'|-1)$ 0 Stellen besitzen; die reellen 0-Stellen im Intervall bc sind also auch die einzigen 0-Stellen von φ.

Wir fassen das Resultat in folgenden Satz zusammen:

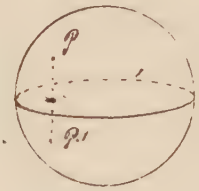
<u>Die Geometrie zeigt uns, daß im Intervall von b bis c mindestens $(|a-a'|-1)$ Wurzeln von $\varphi=0$ liegen. Die Analysis hat uns gezeigt, daß es überhaupt nur $(|a-a'|-1)$ Wurzeln von $\varphi=0$ gibt. Also sind alle Wurzeln von $\varphi=0$ reell und liegen im Intervall von b bis c.</u>

(Di. d. 28 Febr. 94.)

Heute wenden wir uns nun der Aufgabe zu, welche uns den Rest dieses Semesters beschäftigen wird, nämlich zur Untersuchung der <u>analytischen Fortsetzung</u> der η-Function.

Zur analytischen Fortsetzung der η-Function über die Grenzen der bisher auf ein Kreisbogendreieck abgebildeten Halbebene hinaus werden wir uns des schon von Riemann benutzten, aber von Schwarz zuerst in den Vordergrund gestellten <u>Princips der Symmetrie</u> bedienen müssen. Worin besteht dieses?

Was haben wir überhaupt unter Symmetrie an einer Kreislinie zu verstehen?



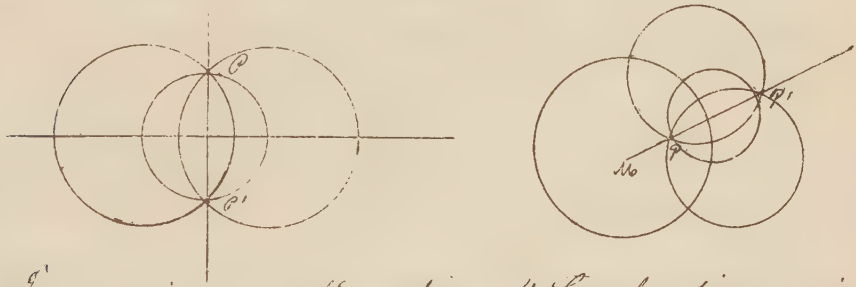
Denken wir uns etwa einen größten Kreis der η-Kugel; dann nennen wir naturgemäß zwei Punkte der η-Kugel symmetrisch in Bezug auf diesen Kreis, wenn sie durch Spiegelung der Kugel an der Ebene des betreffenden Kreises in einander übergehen; dasselbe können wir so ausdrücken, daß wir sagen, zwei Kugelpunkte P und P' sind symmetrisch, wenn sie auf derselben Senkrechten zur Ebene des betr. größten Kugelkreises liegen.

Haben wir es nicht mit einem größten, sondern einem beliebigen Kugelkreise zu thun, so machen wir einfach die projectiv entsprechende Construction. Wir construiren den Pol der Ebene des Kreises in Bezug auf die Kugel

und nennen zwei Punkte P und P' symmetrisch zu dem Kreise, wenn sie auf derselben durch den Pol der Kreisebene gehenden geraden Linie liegen.

Übertragen wir diesen Begriff der Symmetrie in die Ebene, so heißen zwei Punkte zunächst in Bezug

auf eine gerade Linie symmetrisch, wenn der eine der Spiegelpunkt des anderen in gewöhnlichem Sinne ist, ferner symmetrisch in Bezug auf einen Kreis, wenn sie in der Beziehung der reciproken Radien in Bezug auf den Kreis stehen, d. h. wenn sie auf demselben Radius vector liegen und das Product ihrer Entfernungen vom Mittelpunkt M des Kreises gleich dem Quadrat des Kreisradius ist.



Das gemeinsame aller dieser 4 Constructionen ist, daß ein durch die beiden Punkte P und P' gelegtes Kreisbüschel, sei es auf der Kugel, sei es auf der Ebene, auf dem vorgegebenen Kreise resp. der geraden Linie senkrecht steht. Wir können diese Eigenschaft geradezu zur Definition benutzen:

P und P' heißen in Bezug auf einen Kreis symmetrisch, wenn sie die Grundpunkte eines Kreisbüschels sind, das zu dem gegebenen Kreise senkrecht steht.

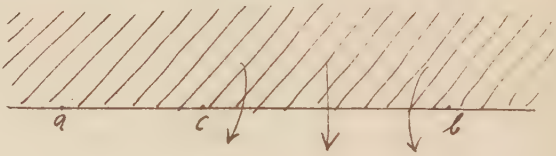
Wir sehen:

Aus der formulirten Definition geht hervor, daß

zwei Punkte P und P', welche in Bezug auf eine Kreislinie symmetrisch sind, bei linearer Transformation der complexen Variablen η in zwei Punkte übergehen, welche in Bezug auf die transformirte Kreislinie symmetrisch liegen.

Nun wenden wir uns zur η-Function.

Es sei einerseits die x-Halbebene gegeben, andererseits das dieser entsprechende durch einen ersten Zweig von η vorgestellte Dreieck auf der η-Kugel.

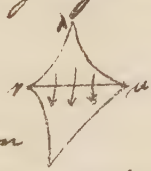


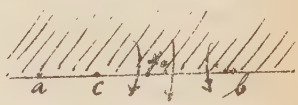
Wir wollen nun aus der positiven Halbebene über das Segment bc in die negative Halbebene übertreten. Dann wird der entsprechende Punkt η aus dem schraffirten Dreieck der η-Ebene über die Seite $u\,v$ in einen Nachbarbereich übertreten; und nun behaupten wir nach dem Princip der Symmetrie, daß das Abbild der negativen Halbebene, wenn wir über bc in dieselbe übergehen, gerade das Dreieck ist, welches man durch Spiegelung des schraffirten Dreiecks an einer Seite $u\,v$ erhält.

Gehen wir in die negative Halbebene hinüber

etwa über das Segment bc, so erhalten wir als Abbild der negativen Halbebene dasjenige Kreisbogendreieck, welches sich längs der Linie l als symmetrisches Abbild unseres schraffirten Dreiecks ergibt.

Dieser Satz, eben das Symmetrieprincip, ist jetzt zu beweisen. Denken wir uns zuerst einmal, was wir durch eine geeignete Auswahl der Particularlösung η stets erreichen können, das η-Dreieck so gewählt, daß seine Seite $\lambda\mu$ mit einem Teile der reellen η-Axe zusammenfällt. Dann entsprechen reellen zwischen b und c gelegenen Werten von x reelle Werte von η.





Dann müssen aber in der Reihenentwicklung von η in der Umgebung eines zwischen b und c gelegenen reellen Punktes x_0:

$$\eta = \mathfrak{P}(x - x_0)$$

alle Coefficienten reell sein. Setzen wir nun für $x - x_0$ irgend einen complexen Wert $x' + i x''$, so ist $\mathfrak{P}$ in seinen reellen und imaginären Teil zu trennen, und so zeigt sich, daß der imaginäre Teil gerade sein Zeichen wechselt, wenn man für $x' + i x''$ den conjugirt complexen Wert $x' - i x''$ setzt. D. h.

conjugirt imaginären Werten von $x-x_0$, oder einfacher von x, entsprechen conjugirt imaginäre Werte von η. Dies gilt nicht allein für den Convergenzbereich der Reihe $f(x-x_0)$ sondern auch für alle in symmetrischer Weise gebildeten analytischen Fortsetzungen derselben, also insbesondere für das Innere der positiven Halbebene bezw. des schraffirten Dreiecks. Alle zu den Werten in der positiven Halbebene x conjugirten Werte von x werden aber durch die negative Halbebene repräsentirt, alle zu den Werten von η im schraffirten Dreieck conjugirten Werte von η bilden das symmetrische Dreieck. Das Princip der Symmetrie ist hiermit für den Fall bewiesen, daß die betr. Seite des Kreisbogendreiecks mit einem Stück der reellen Axe zusammenfällt.

Nun wird aber die Symmetrie der Figuren bei irgend einer projectiven Transformation nicht gestört; also gilt es allgemein, auch wenn die betr. Grenze ein Kreisbogen ist. Wir fassen unser Beweisverfahren folgendermaßen kurz zusammen:

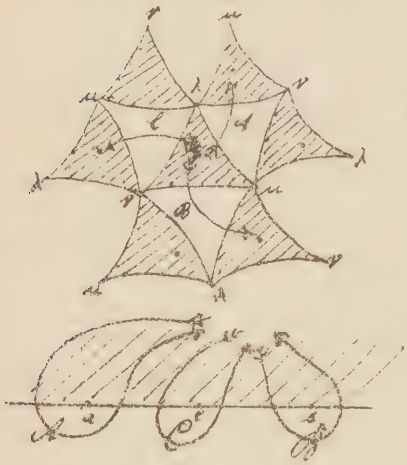
Wir setzen zuerst voraus, daß die Seite l ein Stück der reellen Axe der η-Ebene ist. Dann sage ich, η ist durch eine Potenzreihe nach Potenzen von $x-x_0$ gegeben, welche lauter reelle Coefficienten hat.

Das Princip der Symmetrie ruht nun im vorliegenden Falle einfach darauf, daß eine Potenzreihe mit reellen Coefficienten für conjugirte Werte von $x - x_0$ selbst conjugirte Werte annimmt.

Nachdem wir so das Princip der Symmetrie für den Fall geradliniger Begrenzung des Dreiecks erreicht haben, gilt es allgemein, weil die Symmetrie in Bezug auf eine gerade Linie bei projectiver Transformation einfach Symmetrie in Bezug auf den entsprechenden Kreis wird.

Nachdem wir so ein Abbild der negativen Halbebene gefunden haben, können wir wieder in die positive Halbebene zurückgehen; thun wir dies über ein anderes Segment als bc, so verlassen wir das unschraffirte Dreieck an einer anderen Seite, als wir in dasselbe eingetreten sind; wir werden also ein neues Abbild der positiven Halbebene erhalten. Desgleichen hätten wir im Allgemeinen drei verschiedene Abbilder der negativen Halbebene erhalten, wenn wir längs eines jeden der drei Intervalle der x-Axe von der ursprünglichen positiven x-Halbebene in die negative x-Halbebene hinübergegangen wären. Diese drei verschiedenen Abbilder umgeben das ursprüngliche Dreieck längs der drei

Seiten. Gehen wir von den drei negativen Halbebenen wieder auf alle möglichen Weisen zur positiven Halbebene, so erhalten wir einen weiteren Kranz schraffirter Dreiecke, dann wieder einen Kranz nichtschraffirter Dreiecke, kurz ein ganzes Netz von Dreiecken, welche immer abwechselnd der positiven und der negativen Halbebene entsprechen.



Dieses Dreiecksnetz gibt uns sofort ein klares Bild davon, wie sich η bewegt, wenn x irgend welche Umläufe in der x-Ebene macht. Denn jedesmal, wenn x ein Segment der reellen Axe überschreitet, geht η von dem Dreieck, in dem es sich gerade befindet, über die dem Segment entsprechende Dreiecksseite in ein Nachbardreieck über. Insbesondere entsprechen den drei einfachen Umläufen A, B, C um die Punkte a, b, c der x-Ebene die drei mit den gleichen Buchstaben bezeichneten offenen Wege der η-Ebene. Also dürfen wir sagen:

Durch wiederholte Anwendung des Symmetrie

Princips ergibt sich ein klares Bild von dem Gesamtverlauf derjenigen η-Function, von welcher ein erster Zweig die positive Halbebene $\mathfrak{S}$ auf das anfängliche Kreisbogendreieck abbildet.

Insbesondere erkennen wir in der Figur die geometrische Bedeutung der drei Substitutionen A, B, C.

In der That geht jedes schraffirte Dreieck unserer gesamten Figur aus dem anfänglichen Dreieck durch eine bestimmte lineare Substitution hervor, insofern eine gerade Anzahl von symmetrischen Umformungen eine projective Transformation von η bedeutet.

Die linearen Substitutionen, durch welche das Ausgangsdreieck in die sämtlichen übrigen schraffirten Dreiecke verwandelt wird, sind ein genaues Bild für die Monodromiegruppe des η, und das Nebeneinanderliegen der verschiedenen Dreiecke erläutert genau die Art und Weise, wie die Substitutionen der Monodromiegruppe aus den drei erzeugenden Operationen A, B, C sich zusammensetzen.

Es ist unmöglich, dies letztere hier ins Einzelne genau auszuführen, d.h. ausführlich zu zeigen, wie

man durch Wiederholung der Operationen A, B, C an dem Ausgangsdreieck in irgend ein beliebiges anderes schraffirtes Dreieck gelangt; das muss sich jeder zu Hause selbst überlegen. Übrigens verweise ich auf Dyck. Gruppentheoretische Studien I. Math. Ann. 20. 1881-82, wo diese Verhältnisse in geometrischer Weise besonders klar auseinandergesetzt werden. (Man vergl. auch die elliptischen Modulfunctionen I, p. 230 ff.)

Mit diesen Sätzen über die analytische Fortsetzung der η-Function vermöge des Symmetrieprincips ist eine ganz neue Grundlage für die Behandlung der hypergeometrischen Function geschaffen. Riemann hat diese Sachlage bereits gekannt (vergl. insbesondere seine Abhandlung über die Minimalflächen), aber es ist das grosse Verdienst von Schwarz, in seiner Abhandlung in Crelle's Journ. Bd. 75, 1871-72 diese Beziehungen ausführlich zur Geltung gebracht zu haben. Dieses Verdienst kann nicht genug gerühmt werden; aber leider muss man an der Arbeit das sehr tadeln, dass weder ihr Titel, noch ihre Redaction den grossen Ideen von allgemeiner Bedeutung entspricht, welche in ihr enthalten sind. Alle diese Sätze sind dort nur

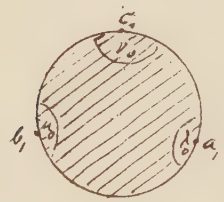
in den Dienst einer an sich zwar wichtigen, aber im Vergleich zum ganzen Gegenstand doch particulären Aufgabe gestellt, nämlich zu untersuchen, wann die Gauß'sche Reihe eine algebraische Function ihres vierten Arguments ist, welche Aufgabe dann erst wie beiläufig darauf führt, nach dem η zu fragen, und die allgemeine Natur des η geometrisch zu erforschen.

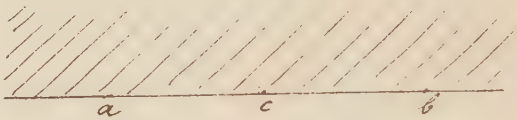
Wir hier werden versuchen, die Folgerungen, die sich aus unserer Figur ergeben, so weit dies der bevorstehende Semesterschluß noch gestattet, in möglichster Vielseitigkeit zu entwickeln. Dabei wird die Aufzählung der algebraischen Fälle der Gauß'schen Reihe ihre naturgemäße Stelle finden. (Do. d. 22 Febr. 94.)

Wir beginnen heute mit dem Bericht über die Reduction der η-Function auf niedere Functionen, und zwar fragen wir zuerst, wann sich η als algebraische Function von x ergibt? Von den algebraischen Functionen sind wieder die einfachsten die rationalen Functionen. Wir beschäftigen uns also zuerst mit der Frage. Unter welchen Umständen ist η eine rationale Function von x?

Dazu genügt offenbar, wenn irregulär-singuläre Stellen der Differentialgleichung ausgeschlossen sind,

daß η eine eindeutige Function von x ist, d. h. daß der positiven und negativen Halbebene x nur je ein einziges Dreieck der η-Kugel entspricht, daß also der Spiegelungsprocess nur ein symmetrisches Dreieck gibt und dann wieder zum Ausgangsdreieck zurückführt: Das einzige derartige Minimaldreieck ist das früher schon gefundene mit den drei Winkeln $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $\nu_0 = 1$, nämlich einfach ein Kreis.





Diese Kreisfläche gibt in der That, an welchem der drei Begrenzungstheile wir auch spiegeln, als einziges symmetrisches Dreieck immer nur das Äußere desselben Kreises und bei Wiederholung kommt man zu dem Innern der Kreisfläche zurück.

Die zu unserm Minimaldreieck $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 1$, $\nu_0 = 1$ gehörende η-Function ist einfach eine lineare Function von x, insbesondere, wenn wir das Dreieck λ_0, μ_0, ν_0 so legen, daß seine Ecken mit a, b, c zusammenfallen, x selbst

$$\eta_0 = x.$$

Nun gehen wir vom Minimaldreieck zum

allgemeinsten verwandten Dreieck, indem wir längs der drei Begrenzungssegmente A, B, C Halbebenen lateral anhängen, indem wir also setzen:

$$\lambda = 1 + B + C,$$
$$\mu = 1 + C + A,$$
$$\nu = 1 + A + B,$$

unter A, B, C irgend drei ganze Zahlen verstanden.

Die hierzu gehörige η-Function muss dieselbe Gruppe von Substitutionen erleiden, wie die zum Minimaldreieck gehörige Function η_0; d. h. die zum erweiterten Dreieck gehörige η-Function reproducirt sich bei allen Umläufen von x, ist also eindeutig und folglich, da es keine wesentlich singulären Stellen gibt, rational in x: $\eta = R(x)$.

Ein Zahlensystem $\lambda = 1 + B + C$, $\mu = 1 + C + A$, $\nu = 1 + A + B$ ist unabhängig vom Anhängungsprocess dadurch charakterisirt, dass λ, μ, ν ganze Zahlen von ungerader Summe sind und den Ungleichungen genügen:

$$\lambda < \mu + \nu, \quad \mu < \lambda + \nu, \quad \nu < \lambda + \mu.$$

Wenn λ, μ, ν diesen Bedingungen genügen, kann man in der That immer, wie wir schon oben sahen, ein Dreieck λ, μ, ν aus einem Dreieck $1, 1, 1$ durch laterale Anhängung von Kreisscheiben herstellen; also:

η ist eine rationale Function von x dann und nur dann, wenn λ, μ, ν ganze Zahlen von ungerader Summe sind, von denen jede kleiner als die Summe der beiden andern ist.

Wollen wir uns von der conformen Abbildung Rechenschaft ablegen, welche η von der x-Ebene entwirft, so bedenken wir, daß bei jeder lateralen Anhängung einer Halbebene an das schraffirte Dreieck (die pos. Halbebene) sich an die negative Halbebene ebenfalls eine Halbebene anhängt, mit andern Worten, daß wir an das aus dem Minimaldreieck und seinem symmetrischen Dreieck bestehende Abbild der x-Ebene bei jedem Schritt eine Vollkugel anhängen. Im ganzen werden also $A+B+C$ Vollkugeln angehängt, und da das Minimaldreieck mit seinem symmetrischen Dreieck die Kugel schon gerade einfach überdeckt, so wird die η-Kugel im Ganzen $1+A+B+C$ mal überdeckt. Also:

Die x-Ebene bildet sich auf eine Riemannsche Fläche über der η-Kugel ab, welche die Kugel $1+A+B+C = \frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2}$ mal überdeckt und drei Verzweigungspunkte von der Multiplicität $\lambda-1 = B+C$, $\mu-1 = C+A$, $\nu-1 = A+B$ besitzt.

Daraus schließen wir, da einem bestimmten

Werte von η $A+B+C+1$ übereinanderliegende Punkte der über der η-Kugel ausgespannten Riemann'schen Fläche, also ebensoviele Werte von x entsprechen:

Der Grad der rationalen Function $\eta = R(x)$ ist

$$1 + A + B + C = \frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}.$$

Wir können aber noch etwas genaueres über die Bauart dieser rationalen Function aussagen. Es seien a_1, b_1, c_1 die Werte, welche η an den drei Stellen $x = a$, $x = b$, $x = c$ annimmt.

Dann muß $\eta - a_1$, da bei a_1 $1 + B + C = \lambda$ Blätter der Riemann'schen Fläche cyclisch zusammenhängen sollen, den Factor $(x-a)^{1+B+C}$ besitzen, ebenso $\eta - b_1$ den Factor $(x-b)^{1+C+A}$, $\eta - c_1$ den Factor $(x-c)^{1+A+B}$. Diese Factoren werden dann mit je einem an der betreffenden Stelle nicht verschwindenden Polynom $\varphi_A(x)$, $\varphi_B(x)$, $\varphi_C(x)$ von dem Grade A, B, C multiplicirt, bis auf einen gemeinsamen Nenner die Größen $\eta - a_1$, $\eta - b_1$, $\eta - c_1$ selbst ergeben, also: η ist durch eine Proportion folgender Art bestimmt:

$$(\eta - a_1) : (\eta - b_1) : (\eta - c_1) = (x-a)^{B+C+1} \cdot \varphi_A(x) : (x-b)^{C+A+1} \cdot \varphi_B(x) : (x-c)^{A+B+1} \cdot \varphi_C(x).$$

Bezüglich der wirklichen Ausrechnung der Polynome P_A, P_B, P_C will ich der Kürze wegen nur die folgende Angabe machen:

$P_A(x)$, $P_B(x)$, $P_C(x)$ sind im Endlichen abbrechende hypergeometrische Reihen.

Wir wenden uns nun zur Beantwortung der allgemeineren Frage: Wann ist η eine algebraische Function von x?

Das Princip muß ein ganz ähnliches sein, wie eben im rationalen Falle. Dasselbe ist wie auch Schwarz angibt, bereits von Riemann in Art. 13 der Abhandlung über Minimalflächen ausgesprochen: Es ist für den algebraischen Charakter von $\eta(x)$ notwendig und hinreichend, daß bei der wiederholten symmetrischen Vervielfältigung des Ausgangsdreiecks nur eine endliche Anzahl von einander verschiedener Dreiecke sich ergeben. Dabei kann die η-Kugel durch die Gesamtheit der Dreiecke mehrfach, doch immer nur in endlicher Anzahl umspannt werden.

Statt von dem Dreieck (λ, μ, ν) diese Eigenschaft zu verlangen, wird es genügen, dasselbe vom Minimaldreieck $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0)$ zu fordern, denn letzteres muß ja dieselbe endliche Anzahl von Spiegelungen

erzeugen, wie das erweiterte Dreieck.

Ich könnte nun mich auf Schwarz berufen, der direct die diophantischen Gleichungen für die Winkelzahlen λ_0, μ_0, ν_0 eines solchen Dreiecks aufstellt und alle möglichen Lösungen derselben aufzählt. Ich ziehe es aber vor, wie in meinem Buche: „Vorlesungen über das Ikosaeder" (Leipzig 1884), folgende Frage an die Spitze zu stellen:

Was für endliche Gruppen linearer Substitutionen $\eta' = \frac{\alpha\eta+\beta}{\gamma\eta+\delta}$ gibt es überhaupt?

Wenn wir alle endlichen Gruppen haben, so können wir danach alle Minimaldreiecke aufzählen, welche zu jeder dieser Gruppe gehören.

Es zeigt sich, daß es im Ganzen 5 Typen solcher endlichen Substitutionsgruppen gibt *), nämlich:

I. Kreisteilungstypus:	G_n	cf. Ik. p. 42–43.
II. Diedertypus:	G_{2n}	
III. Tetraedertypus:	G_{12}	
IV. Octaedertypus:	G_{24}	
V. Ikosaedertypus:	G_{60}	

Eine Gruppe vom Kreisteilungstypus besteht aus den n Wiederholungen einer periodischen

*) cf. Ikosaeder p. 115 ff.

elliptischen Substitution, eine Gruppe vom Dieder-typus enthält $2n$ Substitutionen von der Form $\eta' = \varepsilon^{\rho} \cdot \eta$ und $\eta' = \varepsilon^{\rho} \cdot \frac{1}{\eta}$, $(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}})$. Zum Typus I und II gehören unendlich viele Gruppen, je nach Wahl der ganzen Zahl n; die weiteren Typen dagegen sind wohlbestimmte Gruppen von 12, 24, 60 Substitutionen.

Geometrisch deuten wir die Substitutionen in gewohnter Weise als Drehungen der Kugel. Dann entspricht z. B. die Ikosaedergruppe den Drehungen, bei welchen ein der Kugel einbeschriebenes reguläres Ikosaeder in sich selbst übergeht. Wir denken uns die einzelnen Ecken des Ikosaeders vom Mittelpunkt der Kugel aus auf die Kugelfläche projicirt, ebenso denken wir uns alle die Kreise auf der Kugel gezeichnet, in welchen dieselbe durch die Symmetrieebenen des Ikosaeders geschnitten wird. (cf. Fig. in Ik.)

Wir werden nun alle algebraischen Minimaldreiecke bekommen und aus ihnen durch die bekannten Anhängungsprocesse überhaupt alle algebraischen Dreiecke, wenn wir zusehen, wie viel Minimaldreiecke sich von den Symmetrieebenen

der zu I bis V gehörigen Figuren begrenzen lassen:

Das müssten wir von Fall zu Fall untersuchen. Dabei wird man auch alle zugehörigen verwandten algebraischen Gleichungen aufstellen wollen. Ich verweise in dieser Hinsicht für das Ikosaeder auf die Dissertation von Otto Fischer Leipzig 1885, an die ich mich in der Folge anschliesse, und auf die ich wegen der Einzelheiten der Litteratur verweisen darf.

Heute wollen wir nur den einfachsten Fall, den Kreisteilungstypus, rasch erledigen.

Das Minimaldreieck ist da ein Zweieck, mit rationalem Winkel, nämlich etwa

$$\lambda_0 = \mu_0 = \frac{m}{n}, \quad \nu_0 = 1.$$

Dabei muss, wenn man wirklich $2n$ Dreiecke haben will, m relativ prim zu n sein.

Die zugehörige η-Function, welche das Symbol hat:

$$\eta\left(\begin{matrix} 0 & \infty & 1 \\ \frac{m}{n} & \frac{m}{n} & 1 \end{matrix}\; x\right),$$

ist einfach durch die Gleichung gegeben:

$$\eta^n = x^m.$$

Gehen wir vom Minimaldreieck zum allgemeinsten zugehörigen Dreieck über, so kommen wir zu Gleichungen der allgemeinsten Gestalt

$$\eta^n = \mathrm{Rat}\,(x);$$

Aufgabe muß es sein die hier auftretenden rationalen Functionen von x zu bilden.

In gleicher Weise wie beim Kreisteilungstypus sind die verschiedenen Minimaldreiecke auch bei den anderen Gruppen aufzustellen. Da heute keine Zeit mehr ist, so will ich nur die Anzahl der zu jedem der Typen I bis V gehörigen verschiedenen Minimaldreiecke kurz angeben. In den Fällen I und II gibt es wegen der Willkür in der Wahl der Zahl n unendlich viele Minimaldreiecke, zum Tetraeder- und Octaedertypus je 2 Minimaldreiecke und zum Ikosaedertypus 10 verschiedene Minimaldreiecke. (Fr. d. 23. Febr. 94)

Ich will die einfacheren Typen übergehen und heute gleich von dem interessantesten Fall, dem <u>Ikosaedertypus</u> sprechen, indem ich die 10 da existirenden Minimaldreiecke aufzähle.

Dieselben sind durch folgende Winkelzahlen bestimmt, wobei ich zugleich angegeben habe, wie oft die Gesammtheit aller Dreiecke, welche durch Vervielfältigung des einen Dreiecks entstehen, die ganze Kugel überdeckt.

1) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}$	1 fach		6) $\frac{2}{5}\ \frac{2}{7}\ \frac{2}{5}$	6 fach
2) $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}$	2 fach		7) $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}$	
3) $\frac{2}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{5}$			8) $\frac{4}{5}\ \frac{1}{5}\ \frac{4}{5}$	
4) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{5}$	3 fach		9) $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{5}$	7 fach
5) $\frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{3}{5}$	4 fach		10) $\frac{1}{3}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}$	10 fach

Die Zahl der Überdeckungen ergibt sich durch folgende Überlegung:

Der Flächeninhalt des einzelnen Dreiecks wird durch den sphärischen Excess gemessen

$$\pi(\lambda + \mu + \nu - 1).$$

Die 120 Dreiecke, die durch Spiegelung und die 60 Drehungen entstehen, haben also die Gesamtfläche

$$120\,\pi(\lambda + \mu + \nu - 1).$$

Die einfache Kugelfläche hat den Inhalt 4π, und wenn sie Nfach überdeckt ist, den Inhalt $4N\pi$.

Es muß also

$$4N\pi = 120\,\pi(\lambda + \mu + \nu - 1),$$

also

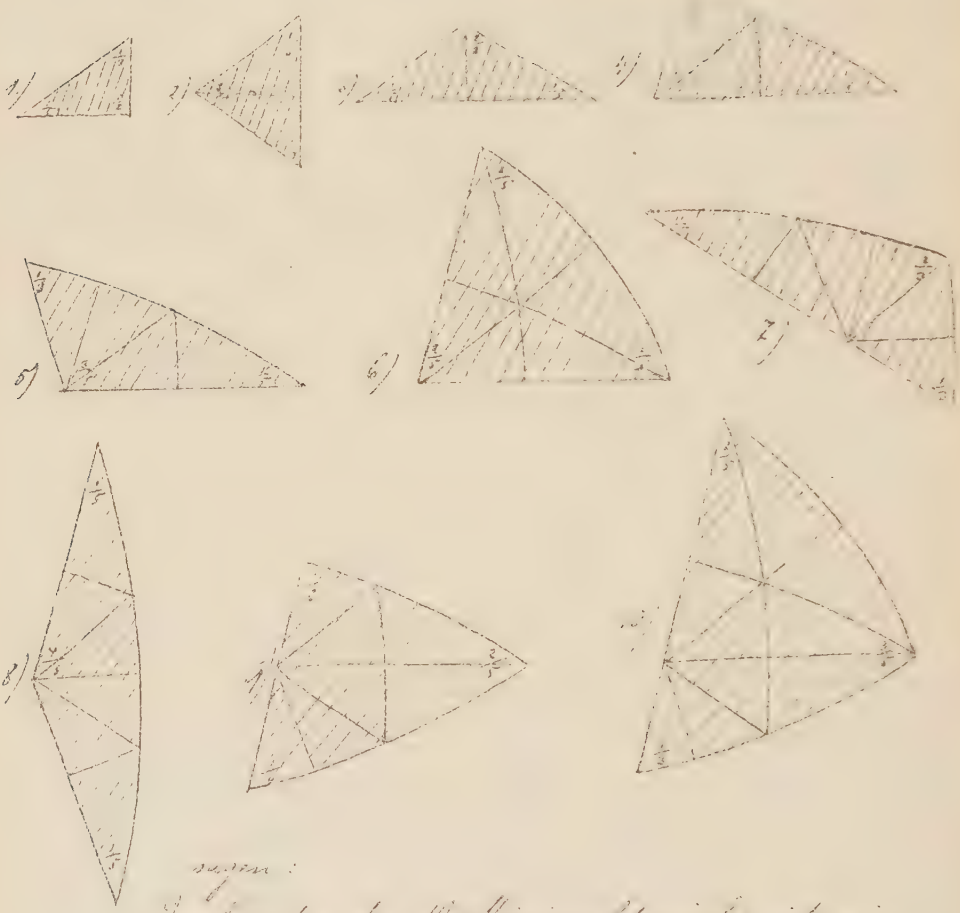
$$N = 30(\lambda + \mu + \nu - 1)$$

sein, was in jedem einzelnen Fall ausgerechnet die angegebenen Anzahlen ergibt.

Die Figuren der 10 Dreiecke folgen auf der nächsten Seite. Man sieht aus ihnen, wie sich jedes der Minimaldreiecke aus dem kleinsten derselben aufbaut. Die Anzahl der zusammenaetzenden Elementardreiecke gibt zugleich die Anzahl der Überdeckungen der Kugelfläche an.

Endlich kann man sich an jedem dieser 10 Minimaldreiecke alle die früher geschilderten Anhängungsprocesse ausgeführt denken und erhält so alle

mit ihm verwandten Dreiecke. Wir werden



sagen:

Durch jedes der 10 Minimaldreiecke ist eine unendliche Reihe verwandter Dreiecke festgelegt und diese 10 Reihen von Tripeln λ, μ, ν geben die Gesamtheit der η-Functionen, welche algebraische Functionen von ϑ sind, deren Monodromiegruppe die Monodromiegruppe ist.

Wir stellen die Aufgabe, diese 10 Reihen von unendlich vielen algebraischen Functionen wirklich aufzustellen.

Am einfachsten ist der Fall 1). Da hier das Minimaldreieck nur zu einer einfachen Überdeckung der Kugel Anlass gibt, so muss x eine rationale Function von η sein, und da der positiven Halbebene x 60 schraffirte Dreiecke der η-Kugel entsprechen, muss sie vom Grade 60 sein, also

$$x = r_{60}(\eta).$$

Genauer werden wir r_{60} folgendermaßen angeben:

Wir spalten η in η_1 und η_2, und bilden uns zuerst drei ganze rationale Formen, von denen die erste in den 12 Ikosaedercken, die zweite in den 20 Flächenmittelpunkten des Ikosaeders, die dritte in den 30 Kantenmitten des Ikosaeders verschwindet (das Ikosaeder vom Mittelpunkt auf die Kugel projicirt gedacht): Diese drei Formen sind natürlich vom 12ten, 20ten, 30ten Grad: Sie heißen:

$$f_{12}(\eta_1 \eta_2) = \eta_1 \eta_2 (\eta_1^{10} + 11 \eta_1^5 \eta_2^5 - \eta_2^{10}),$$

$$H_{20}(\eta_1 \eta_2) = -(\eta_1^{20} + \eta_2^{20}) + 228 \eta_1^5 \eta_2^5 (\eta_1^{10} - \eta_2^{10}) - 494 \eta_1^{10} \eta_2^{10},$$

$$J_{30}(\eta_1 \eta_2) = (\eta_1^{30} + \eta_2^{30}) + 522 \eta_1^5 \eta_2^5 (\eta_1^{20} - \eta_2^{20}) - 10005 \eta_1^{10} \eta_2^{10} (\eta_1^{10} + \eta_2^{10}).$$

Zwischen diesen drei Formen besteht die Identität:

$$1728 f^5 - H^2 - J^2 = 0,$$

und es ist nun x, welches wir ebenfalls in homogene Variablen $x_1 : x_2$ spalten, durch folgende mit der Identität zwischen f, H, J in Einklang stehende Proportion bestimmt:

$$x_1 : (x_1 - x_2) : x_2 = H^3 : -J^2 : 1728 f^5.$$

An den Stellen der η Kugel, wo x_1 verschwindet, verschwindet es, wie man aus vorstehender Formel sieht, 3fach; das bedeutet umgekehrt für die einzelnen Zweige von η, daß sie an der Stelle $x = 0$ den Exponenten $\frac{1}{3}$ haben. Ebenso sieht man unmittelbar, daß $x_1 - x_2$ und x_2, wo sie verschwinden, 2fach bezw. 5fach verschwinden, d.h. daß umgekehrt η an den Stellen $x - 1 = 0$ und $\frac{1}{x} = 0$ die Exponenten $\frac{1}{2}$ bezw. $\frac{1}{5}$ haben. η hat also das Symbol

$$\eta \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & x \end{pmatrix}, \text{ wie es sein soll.}$$

Sieht man umgekehrt x als Function von η an, so kann man dasselbe folgendermaßen kennzeichnen:

Die Function

$$x = \frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} \quad \text{oder auch} \quad x - 1 = \frac{-J^2(\eta)}{1728 f^5(\eta)}$$

bleibt bei den 60 Substitutionen des η die in der Monodromiegruppe enthalten sind ungeändert, und zwar ist die so eindeutige rational Function x die

einfachste absolute Invariante der Ikosaedergruppe.

Übrigens stellt sich neben diese Aussagen auch noch eine homogene Formulirung. Wir können nämlich die Spaltung von η in $\eta_1 : \eta_2$ so einrichten, daß η_1, η_2 homogene ganze lineare Substitutionen erleiden, wenn η den Substitutionen der Ikosaedergruppe unterworfen wird. Bei der homogenen binären Substitutionsgruppe werden wir nun fragen, welches die einfachsten Formen von η_1, η_2 sind, die bei den Substitutionen derselben ungeändert bleiben. Da findet man:

Bei den homogenen Ikosaedersubstitutionen sind die einfachsten Invarianten die Formen $f_{12}(\eta_1 \eta_2)$, $H_{20}(\eta_1 \eta_2)$; $F_{30}(\eta_1 \eta_2)$ zwischen denen die Relation $1728 f^5 - H^3 - F^2 = 0$ besteht.

Soviel über den Fall des Minimaldreiecks 1). Wollen wir die den andern Fällen entsprechenden algebraischen Gleichungen ebenfalls aufstellen, so bedenken wir, daß wir es ja immer wieder mit der Gruppe der 60 Ikosaedersubstitutionen zu thun haben, nur in anderer Anordnung, entsprechend einer anderen Auswahl der erzeugenden Operationen. Wir sagen:

Wir müssen davon ausgehen, daß die Monodromiegruppe der η-Function in allen Fällen die Ikosaedergruppe ist. Die Verschiedenheit der Fälle ruht nur darin,

dass die Ikosaedergruppe in den verschiedenen Fällen aus andern Fundamentalsubstitutionen erzeugt ist).

Infolgedessen ist die bei den Ikosaedersubstitutionen invariante Function

$$\frac{H^3(\eta)}{1728\, f^5(\eta)}$$

auch für die Fälle 2) bis 10) eine Function von x, welche bei beliebigen Umläufen des x sich reproducirt, also, da wesentlich singuläre Stellen nicht vorkommen, eine rationale Function von x. Der Grad dieser rationalen Function ist gleich der Anzahl der Werte von x, die einem beliebigen Werte von η entsprechen; d.h. gleich der Blätterzahl, mit der die 120 Dreiecke die Kugel überdecken; z. B. im Falle 9) gleich 7. Also:

Im Falle 9) wird die Function η einer algebraischen Gleichung von der Gestalt

$$\frac{H^3(\eta)}{1728\, f^5(\eta)} = V_7(x)$$

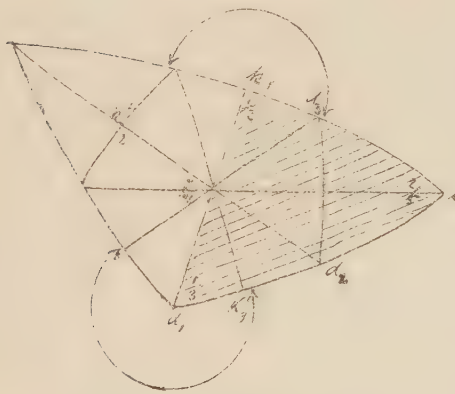
genügen.

Genauer schreibt man diese algebraische Gleichung in folgender Gestalt:

$$H^3(\eta_1 \eta_2) : -T^2(\eta_1 \eta_2) : 1728\, f_{12}^5(\eta_1 \eta_2) = \varphi_7(x_1 x_2) : \chi_7(x_1 x_2) : \psi_7(x_1 x_2),$$

unter φ, χ, ψ ganze rationale Formen 7ten Grades verstanden.

Wir können aber von der Gestalt des η Bereichs ausgehend noch genaueres über die Bauart der φ, χ, ψ aussagen. Man vergleiche die nebenstehende Figur:



Die Form H verschwindet in den Dodekaederecken je einfach, H^3 also je dreifach (als Function von η). An dem Fundamentalbereiche (dem Dreieck mit seinem Spiegelbild) nehmen aber drei Dodekaederecken teil: d_1, d_2, d_3. In der einen Ecke d_1, welche zugleich Ecke des Fundamentalbereichs ist, soll η sich verhalten wie $x_1 \frac{1}{5}$, also H^3 wie x_1, in den beiden anderen Dodekaederecken d_2 und d_3 soll sich dagegen nach unserer Figur η je wie eine lineare Function $x_1 - a_2 x_2$ bezw. $x_1 - a_3 x_2$ verhalten, also H^3 wie die dritte Potenz einer linearen Function.

Damit haben wir aber schon alle 7 Verschwindungsstellen von φ_7, nämlich eine bei $x_1 = 0$ und je eine dreifache bei a_2 und a_3, so daß $\varphi_7(x_1, x_2)$ die Form $C \cdot x_1 (x_1 - a_2 x_2)^3 (x_1 - a_3 x_2)^3 = x_1 (a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2)^3$ haben muß.

In genau entsprechender Weise schließen wir aus der Figur durch Betrachtung der Ikosaederecken i_1 und i_2 sowie der Kantenmittelpunkte k_1, k_2, k_2', k_3 daß sich Ψ und X verhalten wie $x_2^2(a''x_1 + b''x_2)^5$ und wie $(x_1 - x_2)(a'x_1^3 + b'x_1^2x_2 + c'x_1x_2^2 + d'x_2^3)^2$.

Wir fassen also zusammen:

Wir lesen aus der Figur ab, daß die algebraische Gleichung die Gestalt hat:

$$H^3 : J^2 : 1728 f^5 = x_1(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2)^3 : (x_1 - x_2)(a'x_1^3 + b'x_1^2x_2 + c'x_1x_2^2 + d'x_2^3)^2 : x_2^2(a''x_1 + b''x_2)^5.$$

Ich gebe die φ, Ψ, X an, wie sie von Fischer auf Grund der früheren Rechnungen von mir und Bagley umgerechnet sind, nämlich

$$\varphi_3(x_1, x_2) = x_1(2^2 \cdot 3^6 x_1^2 - 3^3 \cdot 7 \cdot 13\, x_1x_2 - 2^7 \cdot 7 \cdot x_2^2)^3,$$

$$X_7(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)(2^3 \cdot 3^9 x_1^3 - 3^7 \cdot 5 \cdot 11 \cdot x_1^2x_2 + 2^8 \cdot 3^4 \cdot 23\, x_1x_2^2 + 2^{15} x_2^3)^2,$$

$$\Psi_7(x_1, x_2) = x_2^2(3^3 \cdot 7\, x_1 - 2^6 x_2)^5.$$

Wir haben so die Gleichung, durch welche das η des Falles 9) definirt wird, wirklich ausgerechnet.

(Mo. 26 Febr. 94) Das vorige Mal haben wir uns mit der algebraischen Herstellung der zu einem Minimaldreieck gehörigen η-Function beschäftigt, insbesondere haben wir für den Fall 9) die Gleichung wirklich hergestellt, und zwar in der Gestalt

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = R_7(x) \left(\text{nämlich} = \frac{x(2916x^2 - 2639x - 3584)^3}{(189x - 64)^5} \right)$$

Andererseits haben wir für das η des Minimaldreiecks 1) die Gleichung

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = x.$$

Das durch diese Gleichung definirte η ist mit dem Symbol

$$\eta\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & x \end{pmatrix}$$

zu bezeichnen, das durch die Gleichung

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = R_7(x')$$

definirte also mit

$$\eta\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & R_7(x') \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist nach der Gestalt des Dreiecks 9) letzteres mit dem Symbol

$$\eta\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & x' \end{pmatrix},$$

identisch, so daß wir also die Formel haben:

$$\eta\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} & x' \end{pmatrix} = \eta\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & R_7(x') \end{pmatrix}.$$

Wir kommen hiermit auf eine Theorie, die ich eigentlich schon vor Weihnachten besprechen wollte, die ich aber aus Mangel an Zeit bei Seite lassen mußte, nämlich auf die <u>rationale Transformation</u>

der η-Function, resp. der P-Function. Wegen der großen Bedeutung derselben wollen wir wenigstens jetzt mit einigen Worten auf dieselbe eingehen.

Die rationale Transformation findet immer dann ihre Stelle, wenn sich das Dreieck einer Function $\eta(\lambda', \mu', \nu', x')$ aus einer ganzen Zahl nebeneinanderliegender Dreiecke einer andern η-Function $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ zusammensetzt, wie es in unserm Beispiel wirklich der Fall ist. Sei das Dreieck der ersten Function ein Aggregat von n Dreiecken der zweiten Function, dann behaupte ich daß eine Formel folgender Art existirt:

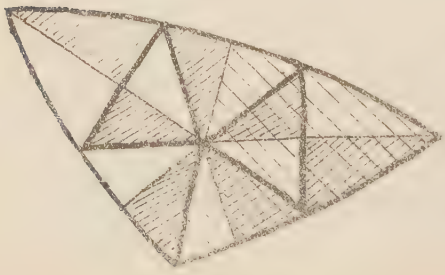
$$\eta(\lambda', \mu', \nu', x') = \eta(\lambda, \mu, \nu, R_n(x')),$$

wobei R_n eine gewisse rationale Function $n$ten Grades ist.

Den Beweis führen wir durch Vergleich der Elemente x und x', welche durch die Formeln

$$\eta(\lambda, \mu, \nu, x) \quad \text{und} \quad \eta(\lambda', \mu', \nu', x')$$

auf die η-Kugel bezogen werden.



Zuerst wird die x-Ebene durch die erste η-Function auf ein kleines Doppeldreieck (in der Fig. stark umzogen) abgebildet. Das große Doppeldreieck

besteht also aus genau n (in der Figur aus 7) Bildern der x-Ebene. Nun wird durch die zweite η-Function das große Doppeldreieck auf die volle x'-Ebene abgebildet; also ist die x'-Ebene mit n Bildern der x-Ebene vollständig und schlicht überdeckt. Auch längs der Schnitte der x'-Ebene, welche dem Rande des großen Doppeldreiecks entsprechen, legen sich die Bilder der x-Ebene mit genau entsprechenden Punkten aneinander, so daß auch bei irgend welchen Umläufen die Anordnung der Bilder der x Ebene in der x' Ebene sich nicht ändern kann.

Darin liegt, daß x eine eindeutige Function von x', und daß x' eine n-deutige Function von x ist, und da in diesem Functionalverhältnis keine wesentlich singulären Punkte vorkommen, so ist x eine rationale Function $n$ten Grades von x', was zu beweisen war.

Der hierin liegende Ansatz dehnt sich auf complexe λ, μ, ν in folgender Form aus: enthält der Fundamentalbereich λ', μ', ν' eine ganze Zahl nebeneinander liegender Fundamentalbereiche λ, μ, ν, so wird jedesmal

$$\eta(\lambda', \mu', \nu', x') = \eta(\lambda, \mu, \nu, x = R(x'))$$

gesetzt werden können.

Ich sage nun:

Arithmetisch ist es nicht schwer, alle hier in Betracht kommenden Zahlensysteme λ, u, v aufzugählen, um dann für jedes einzelne Wertsystem die zugehörige Function $R(x)$ zu bestimmen.

Immer ist das eine ganze Theorie, und ich werde mich daher auf Angabe einiger wichtigsten Citate beschränken müssen.

Was zunächst die einfachsten Fälle angeht (z.B. wenn ein Winkel $= \frac{\pi}{2}$ ist, so daß das Dreieck mit seinem Spiegelbild wieder ein Dreieck bildet), so sind dieselben bereits von Kummer bemerkt worden (Crelle's Journ. 15, 1836), und es ist dann von Riemann in Art. 5 seiner Arbeit einiges über dieselben zusammengestellt.

Dann aber gibt es eine besondere Theorie über diejenigen Fälle der rationalen Transformation, welche aus der Theorie der regulären Körper hervorgehen. Alle die verschiedenen Minimaldreiecke und alle die unendlich vielen verwandten Dreiecke sind ja aus Elementardreiecken zusammengesetzt, so daß jedes zu einer rationalen Transformation führt. Ich verweise in dieser Hinsicht auf die Dissertation von Fischer, 1885.

Was die sonstigen Fälle höherer rationaler Transformation angeht, d. h. die Fälle der Dreiecke II, III sowie der complexen λ, μ, ν, so sind diese von Goursat erschöpfend behandelt worden, vergl. Annalen 24, 1884, sowie Ann. de l'Ec. Norm. 3. sér. t. II und Acta societ. Fennicae 16, beides aus dem Jahre 1885.

Aber damit nicht genug: Pappenitz (Math. Ann. 27. 1886) und Goursat (Liouv. Journ. 3 sér t. III haben auch die allgemeinere Frage nach der algebraischen Transformation der η Function in Angriff genommen.

Pappenitz und Goursat haben ferner hin auch die algebraische Transformation der η-Function betrachtet, wo die Frage ist, ob sich vielleicht ein umfassender Bereich finden läßt, der ebensowohl aus einer ganzen Anzahl von Bereichen der einen η-Function, wie aus einer ganzen Zahl von Bereichen der andern η-Function besteht.

Dann sind nämlich x und x' eindeutige Functionen auf ein und derselben Riemann'schen Fläche, stehen also untereinander in algebraischer Beziehung.

Übrigens ist der Gegenstand [illegible]

darauf nicht in der geometrischen Weise, wie ich es dargestellt habe, behandelt werden, sondern analytisch arithmetisch.

Mit den geometrischen Constructionen, welche den arithmetischen und analytischen Ansätzen parallel laufen, hat sich Van Vleck beschäftigt. —

Wir werden uns nun wieder zur besonderen Betrachtung der Ikosaederfälle.

Die Transformationstheorie zeigt uns, daß beim Ikosaeder die η-Function irgend eines beliebigen der unendlich vielen Dreiecke immer durch eine Gleichung der Gestalt

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = R(x)$$

gegeben sein muß, da jedes Dreieck sich aus Elementardreiecken zusammensetzt.

Aber wir werden nicht nur den Zusammenhang aller dieser Functionen mit x, sondern auch den Zusammenhang der verschiedenen η-Functionen untereinander untersuchen wollen. Ich will mich da auf diejenigen η-Functionen beschränken, welche zu dem Minimaldreieck $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ gehören.

Alle diese η sind untereinander verwandt. Was für eine Art Zusammenhang wird infolge deren

zwischen ihnen statt haben?

Darauf gibt die Theorie der verwandten P-Functionen zunächst eine vorläufige Antwort, einen Ansatz, der weiter zu verfolgen ist. Nämlich:

Hat man einmal zwei verwandte Functionen η und η' gewonnen, und spaltet man dieselben in der Anfangs Januar geschilderten Weise in zwei verwandte η-Functionpaare

$$\eta = \mathfrak{P}_1 : \mathfrak{P}_2 , \quad \eta' = \mathfrak{P}_1' : \mathfrak{P}_2' ,$$

so läßt sich jede weitere verwandte Function in der Gestalt zusammensetzen:

$$\eta'' = \frac{r(x)\,\mathfrak{P}_1 + r'(x)\,\mathfrak{P}_1'}{r(x)\,\mathfrak{P}_2 + r'(x)\,\mathfrak{P}_2'} .$$

Dazu kommt nun aber noch folgendes: Wir denken uns über der x Ebene diejenige Riemann'sche Fläche construirt, in welcher die algebraische Function $\eta(x)$ eindeutig ist. Bei irgend welchen auf der x-Ebene geschlossenen Umläufen der Variablen x um die Punkte $0, \infty, 1$ wird η die Substitutionen der Ikosaedergruppe erleiden, und, und es wird sich in Uebereinstimmung mit diesen Substitutionen reproduciren, wenn x einen nicht nur in der x-Ebene, sondern auch in der Riemann'schen Fläche geschlossenen

Weg beschreibt. Nun ist aber die andere η-Function η' mit η verwandt, erleidet also bei den Umläufen von x dieselben Substitutionen wie η, und muss sich daher auch insbesondere reproduciren, wenn x einen auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Weg beschreibt. η' ist also auf der zu $\eta(x)$ gehörigen Riemann'schen Fläche eindeutig, und muss sich desshalb rational durch η und x ausdrücken lassen. Specialisiren wir η nun noch so, dass es zum Minimaldreieck selbst, nicht zu einem verwandten erweiterten Dreieck, gehört, so wissen wir, das x seinerseits eine rationale Function von η ist. Daraus folgt für die Function η' der Satz:

Ist insbesondere η die zum Elementardreieck selbst gehörige Function, dann wird η' direct eine rationale Function von η sein.

Wir bekommen hiernach das allgemeinste verwandte η, wenn wir erstens η' als rationale Function von η berechnen, dann η und η' in geeigneter Weise spalten und endlich aus den Spaltungsproducten uns η'' in geeigneter Form zusammensetzen.

Dieser allgemeine Satz wäre nun im Einzelnen durchzuarbeiten. Indess zeigt sich, dass

wir bei dieser Frage sehr viel leichter zum Ziel kommen und tiefer eindringen, wenn wir von vornherein homogene Variablen einführen, uns also mit Formen beschäftigen. Ich werde dieses jetzt kurz andeuten:

Wir spalten η nicht in $\mathfrak{P}$-Functionen, sondern in zwei Zweige einer Π-Form, und zwar des Normal-Π zweiter Art

$$\Pi\left(\begin{matrix} a & b & c \\ \lambda & \mu & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\; x_1, x_2\right), \text{ Grad} = \frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2}.$$

Dabei mögen wir unter λ, μ, ν die positiven Werte der Exponentendifferenzen verstehen.

Wir erreichen dadurch, daß Π eine <u>ganze Form</u> von x_1, x_2 ist, d.h. eine solche, die nirgends für endliche Werte der x_1, x_2 unendlich wird: Ausserdem verschwinden nirgends zwei verschiedene Zweige der Form gleichzeitig, d.h. die verschiedenen Zweige sind teilerfremd. Beide Eigenschaften sind für die formentheoretische Brauchbarkeit der Spaltung wesentlich. Also:

<u>Wir spalten η in zwei teilerfremde ganze Formen von x_1, x_2 vom Grade $\frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2}$.</u>

z. B. im Fall des Elementardreiecks $(\lambda, \mu, \nu) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

werden η_1, η_2 zwei teilerfremde ganze algebraische Formen vom Grade $\frac{1}{60}$, welche bei Umläufen von x_1, x_2 homogene Ikosaeder-Substitutionen erleiden, nämlich die beiden Zweige von

$$\Pi_{\frac{1}{60}} \left| \begin{array}{ccccc} x_1 = 0 & & x_2 = 0 & & x_1 = x_2 \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{2} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array} \quad x_1, x_2 \right| .$$

Was hat es nun für eine Bewandtnis mit den drei Formen

$$H(\eta_1, \eta_2), \quad f(\eta_1, \eta_2), \quad T(\eta_1, \eta_2) \; ?$$

Dieselben bleiben bei den homogenen Ikosaedersubstitutionen, welche η_1, η_2 bei geschlossenen Umläufen der x_1, x_2 erleiden, in dem Sinne invariant, daß sie sich nur mit constanten Größen multipliciren. Es sind also multiplicative Formen von x_1, x_2, und zwar, da sie in η_1, η_2 vom Grade 20, 12, 30 sind, η_1, η_2 aber in x_1, x_2 vom Grade $\frac{1}{60}$ sind, so sind H, f, T multiplicative Formen von x_1, x_2 vom Grade $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$. Ferner wissen wir, daß H nur an den Stellen $x_1 = 0$, f nur an den Stellen $x_2 = 0$ und T nur an den Stellen $x_1 = x_2$ verschwindet. Also können H, f, T von den drei Ausdrücken $\sqrt[3]{x_1}$, $\sqrt[5]{x_2}$, $\sqrt{x_1 - x_2}$ nur um constante Factoren unterschieden sein,

und zwar ergibt sich des näheren das Resultat.

An Stelle der Ikosaedergleichung

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = x$$

tritt jetzt das Gleichungssystem

$$H(\eta_1\eta_2) = \sqrt[3]{x_1}, \quad f(\eta_1\eta_2) = \frac{1}{\sqrt[5]{1728}} \cdot \sqrt[5]{x_2}, \quad J(\eta_1\eta_2) = i\sqrt[2]{x_1 - x_2}.$$

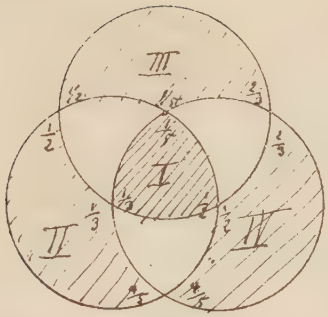
Nun ist es doch jetzt unser Ziel, die zu irgend einem verwandten Dreieck gehörige Function η' durch das η, bezw. durch die homogenen η_1, η_2 des Elementardreieckes rational auszudrücken:

Wir spalten zu dem Zwecke η' in gleicher Weise, wie oben η in zwei teilerfremde ganze Formen η_1', η_2'. Dieselben werden in x_1, x_2 vom Grade $\frac{\lambda' + \mu' + \nu' - 1}{2}$ sein, also, wenn $\frac{\lambda + \mu + \nu - 1}{2}$ der Grad von η_1, η_2 in x_1, x_2 ist, so werden η_1', η_2' als Formen von η_1, η_2 den Grad $\frac{\lambda' + \mu' + \nu' - 1}{\lambda + \mu + \nu - 1}$ haben. Nun ist aber $\lambda' + \mu' + \nu' - 1$ der sphärische Excess des Dreiecks η', $\lambda + \mu + \nu - 1$ derjenige des Elementardreiecks η, der Quotient also, da der sphärische Excess der Inhalt der Dreiecksfläche ist, gleich der Anzahl n derjenigen Elementardreiecke, aus denen sich das Dreieck η' aufbaut.

Zudem nimmt x_1, x_2 für erlaubte Werte von η_1, η_2 (d.h. wenn weder η_1 noch η_2 unendlich wird und nicht η_1 und η_2 gleichzeitig verschwinden) nur erlaubte Werte an, für erlaubte Werte von x_1, x_2 nehmen aber auch η_1' und η_2' nur erlaubte Werte an, also sind η_1', η_2' ganze teilerfremde Formen von η_1, η_2 vom Grade n, und zwar, wie man leicht durch Vergleichung des Verhaltens von η_1, η_2 und η_1', η_2' an den einzig denkbaren singulären Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ schließt, in unserem Falle von durchaus rationalem Verhalten. Wir können also den Satz aufstellen:

Zwei unserer homogenen Schreibweise entnommene η_1' und η_2' als automorphe ganze Formen des Grades von η_1, η_2 und wir stellen die Aufgabe, die automorphen ganzen Formen $n$ten Grades zu bestimmen. Dieser Satz hat nicht mehr den früheren Sinn, daß η' eine automorphe Function $n$ten Grades von η sei.

Wir wollen nun insbesondere einmal die η_1', η_2' für diejenigen Dreiecke berechnen, welche die Winkel der Nebendreiecke des Elementardreiecks haben, also die η-Formen der Dreiecke, welche zum Elementardreieck so liegen, wie es in nebenstehender



(nur schematischen) Figur angedeutet ist. Die Winkelzahlen des Dreiecks I sind $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$, diejenigen der Dreiecke II bis IV $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$.

Die Grad der zugehörigen rationalen ganzen Formen

$$\eta_1' = \varphi_n(\eta_1, \eta_2), \quad \eta_2' = \psi_n(\eta_1, \eta_2)$$

ist für die Dreiecke II bis IV bezw.:

$$n_2 = 19, \quad n_3 = 11, \quad n_4 = 29.$$

Es kommt jetzt also nur darauf an, solche ganze rationale Formenpaare von η_1, η_2 von den Graden 19, 11, 29 aufzustellen, welche sich bis auf einen etwaigen gemeinsamen Factor ebenso substituiren wie η_1, η_2 selbst, welche also, in der Sprache der Invariantentheorie, mit η_1, η_2 <u>cogredient</u> sind. Dabei handelt es sich natürlich nur um die Ikosaedergruppe.

Wir werden sagen:

<u>η_1' und η_2' müssen mit η_1, η_2 cogredient betreffs der homogen Ikosaedersubstitutionen sein.</u>

Da gibt uns nun die Invariantentheorie der algebraischen Formen die Mittel, alle möglichen mit η_1, η_2 cogredienten Formen sofort hinzuschreiben.

Zuerst bildet man nämlich drei Invarianten,

d.h. Formen, die bei den Substitutionen bis auf eine multiplicative Constante ungeändert bleiben; das sind hier eben die drei Formen $H_{20}(\eta_1 \eta_2)$; $f_{12}(\eta_1 \eta_2)$; $T_{30}(\eta_1 \eta_2)$. Aus diesen setzt sich dann die allgemeinste ganze rationale invariante Form in der Gestalt zusammen

$$\Sigma . H^{\alpha} . f^{\beta} . T^{\gamma} ,$$

wobei die $\alpha\, \beta\, \gamma$ jedes Terms der Bedingung genügen müssen, daß

$$20\alpha + 12\beta + 30\gamma$$

gleich dem Grad der herzustellenden Form sind.

Aus einer invarianten Form S kann man nun aber auch leicht durch den „Polaren-Process" ein mit $\eta_1 \eta_2$ cogredientes Formenpaar herstellen, nämlich $-\frac{\partial S}{\partial \eta_2}$ und $+\frac{\partial S}{\partial \eta_1}$.

Insbesondere erhalten wir so einschließlich der unabhängigen Variablen η_1, η_2 vier einfachste Paare cogredienter Formen:

$$\left\| \begin{array}{c|c|c|c} \eta_1 & -\frac{\partial H}{\partial \eta_2} & -\frac{\partial f}{\partial \eta_2} & -\frac{\partial T}{\partial \eta_2} \\ \eta_2 & +\frac{\partial H}{\partial \eta_1} & +\frac{\partial f}{\partial \eta_1} & +\frac{\partial T}{\partial \eta_1} \end{array} \right\| .$$

Und nun zeigt man in der Invariantentheorie, daß diese 4 Formenpaare ein „volles System cogredienter Formen" vorstellen, d.h. daß sich jedes beliebige ganze rationale mit η_1, η_2 cogrediente Formenpaar in der

Gestalt schreiben läßt:

$$\varphi(\eta_1,\eta_2) = \mathfrak{J}.\eta_1 - \mathfrak{J}_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_2} - \mathfrak{J}_2 \frac{\partial f}{\partial \eta_2} - \mathfrak{J}_3 \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_2},$$

$$\psi(\eta_1,\eta_2) = \mathfrak{J}.\eta_2 + \mathfrak{J}_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_1} + \mathfrak{J}_2 \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + \mathfrak{J}_3 \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_1},$$

unter $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ ganze rationale invariante Formen von geeigneten Graden verstanden.

Die Invariantentheorie der Ikosaedersubstitutionen lehrt uns, daß die allgemeinsten mit η_1, η_2 cogredienten Formen n^{ten} Grades sich in der vorstehenden Gestalt darstellen, unter $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3$ ganze Formen der $\mathcal{H}, f, \mathcal{T}$ verstanden, die so gewählt sind, daß in jedem Gliede die Dimension in η_1, η_2 gleich n ist.

Diese Formel ist nun, um die Formen der drei Nebendreiecke zu berechnen für $n = 19$, $n = 11$, $n = 29$ zu specialisiren. Man sieht da leicht, daß mit diesen Graden nur die folgenden Darstellungen verträglich sind:

$\lambda, \mu, \nu = \frac{1}{3}\ \frac{4}{5}\ \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$
$\varphi(\eta_1,\eta_2) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_2}$	$-\frac{\partial f}{\partial \eta_2}$	$-\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_2}$
$\psi(\eta_1,\eta_2) = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_1}$	$+\frac{\partial f}{\partial \eta_1}$	$+\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \eta_1}$

Die Anwendung unserer allgemeinen Formel für φ, ψ auf die 3 Nebendreiecke ist besonders empfohlen.

Wir kommen nämlich zu den Polaren von H, f, T zurück.

Dieses einfache Resultat ist zuerst in Math. Ann. 12 S. 528. 1877 angegeben worden.

Ich will die Formel noch auf ein anderes der verwandten Dreiecke anwenden, nämlich auf das Dreieck mit den Winkeln $\lambda, \mu, 2-\nu = \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}$, für welches $n = 31$ wird.

Der allgemeinste mit diesem Grade verträgliche Ausdruck hat die Gestalt

$$\varphi = c\, T \cdot \eta_1 - c' H \frac{\partial f}{\partial \eta_2} - c'' f \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta_2},$$
$$\psi = c \cdot T \cdot \eta_2 + c'' H \frac{\partial f}{\partial \eta_1} + c'' f \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta_1}:$$

Hier kann noch eine der 3 Constanten c, c', c'' nach Belieben $= 0$ gesetzt werden, da man die Identitäten hat:

$$2 T \cdot \eta_1 = -3 H \frac{\partial f}{\partial \eta_2} + 2 f \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta_2}, \quad 2 T \cdot \eta_2 = 3 H \frac{\partial f}{\partial \eta_1} - 2 f \frac{\partial H}{\partial \eta_1}.$$

Das neue Beispiel $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{3}{2}$ erledigt sich nicht ganz so einfach, wie die vorangehenden Beispiele; es bleibt noch das Verhältnis zweier Constanten zu berechnen, was man unter Zuhülfenahme der Reihenentwicklung machen muß. — In analoger Weise sind alle weiteren Beispiele zu behandeln. Wir sagen:

In diesen Beispielen liegt ein neuer Ansatz für die Weiterbildung der Verwandtschaftslehre. Man wird in jedem Falle η in der geschilderten Weise in zwei ganze Formen $\eta_1 : \eta_2$ spalten und nun zunächst nach dem vollen Formensystem der cogredienten Formen fragen, aus welchem sich die allgemeinsten cogredienten Formen mit Hilfe invarianter Multiplicatoren zusammensetzen.

Soviel über die algebraisch integrirbaren Fälle.

(Vi d. 27 Feb. 94.) Wir haben in den letzten Stunden die algebraisch integrirbaren Fälle der hypergeometrischen Differentialgleichung kennen gelernt; dieselben mußten sämtlich dem Falle I unserer Einteilung auf S. 388 angehören, weil die Gruppe eine endliche sein soll, und dies nur bei gewöhnlichen Drehungsgruppen, wo es sich also um die gewöhnliche sphärische Trigonometrie handelt, möglich ist. Weiteres ist betr. den Fall I hier nicht hinzuzufügen.

Wir wollen aber zusehen, was sich im Falle II machen läßt.

Die Gruppe ist da notwendig unendlich (abgesehen von den trivialen Fällen), so daß wir algebraische Reducirbarkeit nicht erwarten können; nimmer aber wird es gelingen, die betr. η auf eine niedere

Functionsclasse, nämlich die Integrale multiplicativer Functionen, zu reduciren.

Der Fall II ist durch das Bestehen einer Relation folgender Art zwischen den Winkelzahlen charakterisirt:

$$\varepsilon\lambda + \varepsilon'\mu + \varepsilon''\nu = 2\varkappa + 1,$$

worin $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ jedes $= +1$ oder $= -1$ sein kann, und $\varkappa$ eine positive ganze Zahl vorstellt.

Was bedeutet dies functionentheoretisch? Ich könnte mich behufs Beantwortung dieser Frage auf die uns bekannte Gestalt der Dreiecke berufen, damit aber die Betrachtung ihre Gültigkeit auch für complexe Winkelzahlen λ, μ, ν behält, so wollen wir analytisch verfahren.

Man kann, wie wir von früher wissen, jede hypergeometrische Function auf 24 Weisen durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von x und $x-1$ auf eine Gauß'sche Reihe reduciren; wir haben nur dafür zu sorgen, daß an der Stelle 0 und der Stelle ∞ je einer der Exponenten verschwindet, und dann die Formel anzuwenden

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \mathcal{P}\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & x \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{vmatrix}.$$

In unserm Falle können wir die P-Function

$$P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{-\varepsilon\lambda-\varepsilon'\mu-\varepsilon''\nu+1}{2} & 0 & x \\ \varepsilon\lambda & \frac{-\varepsilon\lambda+\varepsilon'\mu-\varepsilon''\nu+1}{2} & \varepsilon''\nu & \end{matrix}\right|$$

benutzen und gewinnen hieraus die Reihe

$$F\left(\frac{-\varepsilon\lambda-\varepsilon'\mu-\varepsilon''\nu+1}{2}, \frac{-\varepsilon\lambda+\varepsilon'\mu-\varepsilon''\nu+1}{2}, 1-\varepsilon\lambda, x\right),$$

welche sich infolge der für λ, μ, ν geltenden Relation auf folgenden Ausdruck bringen läßt:

$$F(-\nu-\nu+\varepsilon'\mu, 1-\varepsilon\lambda, x).$$

Hierin ist aber das erste Argument eine negative ganze Zahl, und dann, wissen wir, bricht die Reihe nach dem ν^{ten} Gliede ab. Wir haben also jetzt das Resultat:

<u>Wenn der Fall II vorliegt mit der Relation:</u>

$$\varepsilon\lambda+\varepsilon'\mu+\varepsilon''\nu = 2\nu+1,$$

<u>dann befindet sich unter den zur φ-Function gehörigen hypergeometrischen Reihen ein Polynom $P_\nu(x)$ ν^{ten} Grades.</u>

Umgekehrt kann man sagen, daß, wenn ein solches hypergeometrisches Polynom existirt, daß eine Relation $\varepsilon\lambda+\varepsilon'\mu+\varepsilon''\nu = 2\nu+1$ bestehen muß; also:

Umgekehrt ist das Auftreten einer solchen abbrechenden hypergeometrischen Reihe für den Fall II charakteristisch.

Von hier aus findet man nun für η selbst eine charakteristische Formel.

Es sei $\eta = \frac{P_1}{P_2}$; wir bilden $\eta' = \frac{P_1' P_2 - P_1 P_2'}{P_2^2}$.
Der Zähler hierin ist aber bekanntlich $= e^{-\int p\,dx}$, wenn P der Differentialgleichung $y'' + p y' + q y = 0$ genügt. Wählen wir für P_2 gerade unser Polynom $\varphi_r(x)$, so wird p

$$p = \frac{1-\varepsilon\lambda}{x} + \frac{1-\varepsilon''\nu}{x-1}, \quad e^{-\int p\,dx} = x^{\varepsilon\lambda-1}(x-1)^{\varepsilon''\nu-1},$$

also $$\eta' = \frac{x^{\varepsilon\lambda-1}(x-1)^{\varepsilon''\nu-1}}{\varphi_r(x)^2}.$$

η selbst ergibt sich hieraus durch eine Quadratur.
Ich will übrigens, um das Bildungsgesetz deutlicher hervortreten zu lassen, den Integranden in homogener Form schreiben

$$\eta = \int \frac{x_1^{\varepsilon\lambda-1}\, x_2^{\varepsilon'\mu-1}\,(x_1-x_2)^{\varepsilon''\nu-1}}{\varphi_r(x_1, x_2)^2}(x_1\,dx).$$

In unserm Falle II stellt ein geeignet herausgegriffenes η sich als Integral einer multiplicativen Function dar.

Auch diese Eigenschaft einer η-Function läßt rückwärts schließen, daß der Fall II vorliegen muß;

also:

Auch hiedurch ist der Fall II charakterisirt.

Wir wollen nun, jetzt, unter ausdrücklicher Beschränkung auf den Fall reeller λ μ ν, die conforme Abbildung durch unser η näher betrachten. Da denn wir zunächst aus der Darstellung durch ein Integral ab, was wir schon von früher wissen, daß nämlich das η-Dreieck ein geradliniges Dreieck ist.

Wenn das Dreieck wirklich die Winkel λ, μ, ν besitzen soll, so darf das Polynom an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = x_2$ nicht verschwinden; andernfalls müßten an den Ecken noch Windungen hinzukommen oder fortfallen. Wenn ferner $P_x(x_1, x_2)$ an irgend einer andern Stelle verschwindet, so wird der Integrand daselbst jedenfalls unendlich, das Integral also einfach, jedoch im Allgemeinen noch mit einem logarithmisch unendlich werdenden Gliede; ein solches muß aber ausgeschlossen sein, da dies eine neue singuläre Stelle der Differentialgleichung ergeben würde; P_x muß also noch ν Bedingungen genügen, durch welche es übrigens bis auf einen constanten Factor wohlbestimmt ist, nämlich als eine abbrechende hypergeometrische Reihe.

Da die η-Function die Halbebene auf ein Dreieck

abbildet, muss der Nenner φ_x^2 so gebildet sein, dass er bei der Integration nur einfache algebraische Unendlichkeitspunkte ergibt.

Dass η an einer Stelle unendlich wird, bedeutet natürlich geometrisch, dass sich an der Stelle das Dreieck ins Unendliche erstreckt. Insbesondere in einer Ecke, etwa λ, wird das Integral unendlich, wenn die zugehörige Zahl $\varepsilon = -1$ ist, bleibt dagegen endlich, wenn $\varepsilon = +1$ ist. Wir finden also folgenden schon früher aus der Betrachtung der verschiedenen verwandten Dreiecke erschlossenen Satz bestätigt.

Die Ecke λ, μ, ν liegt im Endlichen oder im Unendlichen, je nachdem ε, bezw. $\varepsilon', \varepsilon'' = +1$ oder $= -1$ ist.

Was die sonstigen Erstreckungen des Dreiecks ins Unendliche betrifft, so rühren dieselben sämtlich von 0-Stellen des bei reellen λ, μ, ν reellen Polynoms $\varphi_x(x_1, x_2)$ her. Diese 0-Stellen mögen sich in r' reelle und in $2r''$ conjugirt complexe Punkte scheiden, so dass $r = r' + 2r''$ ist.

An jeder der r' reellen 0 Stellen muss sich eine Seite des Dreiecks durch Unendliche ziehen, die Seite l, oder m oder n, je nachdem die 0 Stelle auf dem Segment 1∞ oder 01 oder $\infty 0$ der reellen x-Axe liegt. Von jedem Paare conjugirt complexer

O-Stellen liegt aber immer nur eine in der positiven Halbebene, von welcher die Dreiecksfläche das conforme Abbild ist; jeder in der positiven Halbebene gelegenen O-Stelle entspricht aber, daß die Dreiecksfläche sich einmal durchs Unendliche zieht.

Wir müssen also sagen, daß sich das Dreieck r' mal mit seinen Seiten und r'' mal mit seiner Fläche durch das Unendliche zieht, wobei r'' die Anzahl der reellen Wurzeln, $2r''$ die Anzahl der complexen Wurzeln der Gleichung $\varphi_r(x_1, x_2) = 0$ bedeutet.

Umgekehrt kann man natürlich aus der Gestalt des Dreiecks sofort auf die Realitätsverhältnisse und die Lage der Wurzeln von $\varphi_r(x_1, x_2) = 0$ schliessen.

Die Anzahl r' und die Verteilung der r' Wurzeln auf die drei Segmente der x-Axe ergibt sich durch die Betrachtung des reducirten Dreiecks und die Art und Weise, wie das Dreieck aus dem reducirten Dreieck durch Anhängungsprocesse entsteht, was dann eben in den Ergänzungsrelationen der Trigonometrie seinen Ausdruck findet. Die Zahl r'' folgt dann aus der Relation $r' + 2r'' = r$.

Wir wollen nun wieder λ, μ, ν allgemein, auch complexer Werte fähig, annehmen, und wollen nach der Monodromiegruppe der η-Functionen des Falles II fragen.

Wenn irgend welche geschlossene Umläufe in seiner Ebene macht, so multiplicirt sich der Integrand nur mit constanten Factoren von folgender allgemeinen Gestalt

$$e^{2i\pi(a\lambda + b\mu + c\nu)},$$

unter a, b, c irgend welche positive oder negative ganze Zahlen verstanden.

Wenn aber der Integrand sich mit einer Constanten multiplicirt, so muss das Integral sich mit derselben Constanten multipliciren, wird aber außerdem noch im Allgemeinen um einen Periodicitätsmodul additiv sich verändern. Also:

Die Monodromiegruppe des η ist in der zweigliedrigen continuirlichen Gruppe

$$\eta' = \alpha\eta + \beta$$

enthalten.

Rückwärts ist durch diese Eigenschaft der Monodromiegruppe wieder der Fall II völlig charakterisirt.

Durch diesen Satz tritt die Kategorie II von η-Functionen neben die algebraisch integrirbaren Fälle, die auch durch eine Eigenschaft der Monodromiegruppe charakterisirt waren, nämlich durch die Eigenschaft der Gruppe, endlich zu sein.

Um noch einen letzten Punkt für den Fall II

zu berühren, fragen wir, wie sich hier die Theorie der verwandten Functionen stellt?

Man sieht, wenn η_1 und η beide dieselben ganzen linearen Transformationen $\alpha\eta_1+\beta$ und $\alpha\eta+\beta$ erleiden, daß dann $\eta_1-\eta$ sich rein multiplicativ verhält, mit denselben Multiplicatoren wie η_1' bezw. η'. Nach mehr: das multiplicative Verhalten dieser rührt nur von den irrationalen Factoren $x^{\varepsilon\lambda}(x-1)^{\varepsilon''\nu}$ her, und läßt sich durch Division mit diesen beseitigen; genau ebenso bei $\eta_1-\eta$. Also:

Die verwandten Functionen hängen im vorliegenden Falle in einfachster Weise durch die Formel zusammen:

$$\frac{\eta_1-\eta}{x^{\varepsilon\lambda}(x-1)^{\varepsilon''\nu}} = R(x).$$

Diese Relation zwischen verwandten Functionen und überhaupt die Lehre dieser verwandten Functionen ist von Van Vleck in seiner Dissertation behandelt, nur daß Van Vleck statt dreier Verzweigungspunkte unter dem Integralzeichen beliebig viele annimmt und den Fall dreier Verzweigungspunkte immer nur als ein Beispiel heranzieht. –

Wir haben nun eine Reihe von Fällen kennengelernt, in denen sich die Integration der hypergeometrischen

Differentialgleichung durch Functionen niederer Art bewerkstelligen läßt, nämlich alle Fälle, wo das Integral eine algebraische Function ist, und alle Fälle, wo man durch Quadratur einer multiplicativen Function zum Ziele kommt.

Doch ist unser Verfahren noch wenig systematisch gewesen. Wir wissen nicht, ob wir hiermit alle möglichen niederen Fälle erschöpft haben.

Wir werden fragen, ob es nicht überhaupt ein allgemeines Princip gibt, wonach wir die Differentialgleichungen für die hier vorliegenden Fragestellungen einteilen können.

Wir kommen damit genau auf den Gegenstand, welchen Picard (Sur les équations différentielles linéaires et les groupes algébriques de transformations. Ann. de Toulouse 1887) und Vessiot in seiner Thèse v. 1892 (Sur l'intégration des équations différentielles linéaires. Ann. de l'Éc. norm. t. IX. 1892) behandelt haben. Ich will über das Picard-Vessiot'sche Classificationsprincip hier nur kurz referiren, und verweise übrigens auf die etwas anschaulichere Darstellung in meiner Vorlesung über höhere Geometrie II. S. 266–297.

Picard und Vessiot ordnen jeder Differential-

gleichung eine gewisse Gruppe von Transformationen zu, welche ich die „Rationalitätsgruppe" der Differentialgleichung nennen will. Diese ist folgendermaßen zu definiren: Es ist die kleinste, d. h. wenigst umfassende Gruppe von der Eigenschaft, daß eine rational aus den Particularlösungen der Differentialgleichung und aus deren Ableitungen zusammengesetzte Function, welche durch die Gruppe nicht verändert wird, eine rationale Function von x ist, daß also jede rationale Differentialinvariante der Gruppe eine rationale Function von x ist:

$$\Psi\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = R(x).$$

Bei unserer Differentialgleichung 3. Ordn. für η wissen wir, daß eine rationale Differentialinvariante der continuirlichen Gruppe aller projectiven Transformationen

$$\eta' = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$$

gewiss eine rationale Function von x ist. Diese Gruppe aller projectiven Transformationen ist dann aber noch nicht die Rationalitätsgruppe selbst; sie ist nur dann die Rationalitätsgruppe, wenn es nicht eine

kleinere Gruppe gibt, deren Differentialinvarianten schon rationale Functionen von x sind. Jedenfalls aber ist die Rationalitätsgruppe der Gleichung, wenn nicht die ganze projective Transformationsgruppe selbst, doch eine Untergruppe derselben.

Ich habe nun bereits in der Vorlesung über Höhere Geometrie II S. 278 gerade mit Rücksicht auf die Verwendung zur Classification der hypergeometrischen Differentialgleichungen alle Typen der hier in Betracht kommenden möglichen Rationalitätsgruppen aufgestellt; ich wiederhole hier das damals gegebene Schema, indem ich zugleich die zugehörigen einfachsten Differentialinvarianten beisetze:

		Invariante
1.) $\eta_1 = \eta$	Identität	η
2.) $\eta_1 = \varepsilon^g \eta$	Kreistheilungstypus	η^n
3.) $\eta_1 = \varepsilon^g \eta^{\pm 1}$	Diedertypus	$\eta^n + \eta^{-n}$
4.)	Tetraedergruppe	....
5.)	Oktaedergruppe	....
6.)	Ikosaedergruppe	$\frac{H^3(\eta)}{1728\, f^5(\eta)}$
7.) $\eta_1 = \alpha\eta$	Erweiterter Kreistheilungstypus	$\frac{\eta'}{\eta}$
8.) $\eta_1 = \alpha \cdot \eta^{\pm 1}$	Erweiterter Diedertypus	$\left(\frac{\eta'}{\eta}\right)^2$
9.) $\eta_1 = \eta + \beta$		η'
10.) $\eta_1 = \varepsilon^g \eta + \beta$		$(\eta')^n$
11.) $\eta = \alpha\eta + \beta$		$\frac{\eta''}{\eta'}$
12.) $\eta_1 = \frac{\alpha\eta + \beta}{\gamma\eta + \delta}$		$\frac{\eta'''}{\eta'} - \frac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2$.

Die Gruppen 1) bis 6) sind discontinuirliche Gruppen, eben die endlichen Gruppen, welche zu den algebraisch integrirbaren Fällen gehören. Die einfachsten zu diesen Fällen gehörigen Invarianten sind rationale Functionen von η; zur Identität gehört η selbst als Invariante, d.h. die Lösung einer zum Typus 1) gehörenden Differentialgleichung hat die Gestalt

$$\eta = \mathrm{Rat}(x)$$

Geradeso bei den übrigen endlichen Gruppen 1) bis 6); z.B. die Lösung irgend einer zum Ikosaedertypus gehörigen Differentialgleichung ist durch eine Gleichung der Gestalt

$$\frac{H^3(\eta)}{1728 f^5(\eta)} = \mathrm{Rat}(x)$$

gegeben. Die Differentialinvarianten des Tetraedertypus und des Oktaedertypus sind ganz analog zusammengesetzt, wie die des Ikosaedertypus (vergl. Ikosaeder S. 60).

Wir haben gesehen, daß es in der That Differentialgleichungen zu einem jeden der Typen 1) bis 6) gibt, den einfachsten folgenden Exponentenzusammenstellungen λ, μ, ν entsprechend:

1) $1, 1, 1$; 2) $\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, 1$; 3) $\frac{1}{n}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$;

— von da aus bestimmten wir die sämtlichen hierher

gehörigen Wertsysteme des λ, μ, ν.

In den Fällen 6) bis 12) bedeuten α und β continuirlich veränderliche Parameter, und zwar so, daß in den Gruppen 7) 9) 11) 12) je alle Substitutionen durch continuirliche Abänderung der Parameter in einander überzuführen sind, während in 8) zwei vollständig getrennte in sich continuirliche Mannigfaltigkeiten von Substitutionen, nämlich $\eta_1 = \alpha\eta$ und $\eta_1 = \alpha\eta^{-1}$ enthalten sind, in 10) 2 unterschiedene Continua.

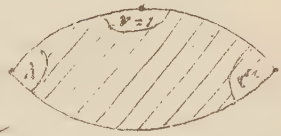
Die Gruppen 7, 9, 11, 12, nennt man daher continuirliche Gruppen, 8) und 10) gemischte Gruppen. Bei allen diesen Gruppen, welche einig veränderliche Parameter enthalten, sind die entsprechenden Invarianten rationale Functionen von η und einen Differentialquotienten deren höchste Ordnung mit der Anzahl der unabhängigen Parameter übereinstimmt.

Wir haben nun zugesehen, ob wir wirklich die Differentialgleichungen zu den einzelnen Fällen 7) bis 12) bereits kennen.

Zum Falle 7) gehört ein Elementardreieck, wie zum Falle 2) des Kreisteilungstypus, nur daß die Winkelöffnung der Sichel kein rationaler, sondern ein irrationaler oder complexer *) Teil von π ist, so

*) Das ist natürlich ein homogener Ausdruck. So wie λ eine

dass die Sichel nicht nach einer endlichen Anzahl von Spiegelungen wieder mit sich zur Deckung kommt. Also:



Die einfachsten Differentialgleichungen des Typus 7) haben ein Exponentensystem $(\lambda, \lambda, 1)$, wie diejenigen des Kreisteilungstypus, jedoch mit irrationalem oder complexem Werte von λ. Daher haben wir die Benennung „erweiterter Kreisteilungstypus" eingeführt.

Analog entspricht der erweiterte Riedertypus einem Minimaldreieck $(\lambda, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit irrationalem oder complexem Werte von λ, während dem elementaren Riedertypus ein ebensolches Dreieck mit rationalem Werte von λ zugehört.

Ich sage nun ferner: Die Typen 9), 10), 11) gehören alle zu dem früher mit II bezeichneten Falle geradlinigen Dreiecke, für welchen die Relation

$$\varepsilon\lambda + \varepsilon'\mu + \varepsilon''\nu = 2r + 1$$

charakteristisch ist, und zwar liegt der Fall 9) vor, wenn λ, μ, ν ganze Zahlen sind, der Fall 10), wenn λ, μ, ν rational sind und der Fall 11), wenn ein oder mehrere der Zahlen λ, μ, ν irrationale oder complexe Werte haben.

---

complexe Zahl ist, können wir von einem Dreiecke, das der Halbebene $\mathfrak{X}$ entspricht, nicht mehr reden, sondern müssen den der Gesammtebene $\mathfrak{X}$ entsprechenden „Bereich" in Betracht ziehen.

Alle übrigen Fälle gehören zum allgemeinsten Typus 12), in welchem die Rationalitätsgruppe die allgemeine projective Gruppe ist.

Mit dieser Aufzählung ist in die ganze hier vorliegende Frage Klarheit gebracht.

Wir wissen jetzt insbesondere, dass unsere Aufzählung der reducibeln Fälle vollständig war, denn alle unter 1) bis 11) gehörigen Differentialgleichungen lassen sich entweder algebraisch oder durch Quadratur einer multiplicativen Function lösen.

Schon seit dem vorigen Jahrhundert hat man sich gefragt, wann man die Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung auf niedere Functionen zurückführen kann. Ich will in dieser Hinsicht einige Litteratur angeben.

Was zunächst die algebraischen Fälle angeht, so sind von diesen nur die allereinfachsten den älteren Mathematikern bekannt geworden.

Die höheren algebraisch integrirbaren Fälle der hypergeometrischen Differentialgleichung sind erst durch die Fuchsischen Methoden zugänglich geworden.

Die Frage, mit der sich die früheren Analysten zu beschäftigen pflegten, war die, wann man eine vorgelegte Differentialgleichung durch Quadraturen

lösen könne. Ich habe in einer der ersten Stunden des Semesters das Buch von Pfaff: Disquisitiones analyticae (1797) Ihnen bereits vorgelegt; das Problem, mit dem sich diese Untersuchungen beschäftigen, ist gerade die Frage nach der Lösbarkeit der Differentialgleichung durch Quadratur.

Die sogenannten integrablen Fälle, welche Pfaff sucht und im Princip alle findet, sind gerade die Fälle 1) 2) 3) 7) 8) 9) 10) 11.)

Pfaff hat das aber nicht ins Einzelne ausgeführt. Dies that erst Markoff in Math. Ann. 28. 29. 1886-87; vergl. auch eine Notiz desselben in Bd. 40. 1891-92. Die theoretische Grundlage bilden dabei die allgemeinen Entwicklungen von Liouville in Liouv. Journ. 4. 1839 (Sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles linéaires du 2de ordre par des quantités finies explicites).

Der Fortschritt der neuen Auffassung von Picard und Vessiot liegt darin, daß die Heraushebung der speciellen Fälle, welche die früheren Autoren bereits vorgenommen haben, auf ein allgemeines Princip, das Gruppenprincip, insbesondere auf das Princip der Rationalitätsgruppe zurückgeführt ist.

Das Beispiel der η-Function ist das erste, an welchem

man die Picard-Vessiot'schen Einteilung wirklich durchführen kann. Es wird darauf ankommen, in gleicher Weise den Picard-Vessiot'schen Ansatz für höhere Fälle nicht nur als ein mögliches Schema auszuarbeiten, sondern wirklich genau durchzuführen.

Damit meine ich, daß man nicht nur die verschiedenen möglichen Rationalitätsgruppen aufzählen soll, um dann zu sagen, jede Differentialgleichung der betreffenden Ordnung muß zu einer dieser Gruppe gehören, sondern daß man auch soweit kommt, zu sagen, in welche der aufgestellten Kategorien eine vorgelegte Differentialgleichung gehört.

Bei der hypergeometrischen Differentialgleichung ist dieses Problem deswegen so unmittelbar zu lösen, weil man zu jeder Differentialgleichung die Monodromie-Gruppe unmittelbar angeben kann, bei höheren Differentialgleichungen aber ist durch die Exponenten die Monodromiegruppe noch nicht bestimmt, die accessorischen Parameter treten mit in die Betrachtung ein, und die ganze Entwicklung wird zweifelos viel complicirter. —

(Do d. 1. Mai 97.)

Heute will ich zunächst gewissermaßen als Anhang zu unsern Betrachtungen über die Integrirbarkeit der regulären Differentialgleichung mit drei

Verzweigungspunkten auf die entsprechende Frage bei demjenigen Grenzfall eingehen, den wir schon als den Fall der Bessel'schen Differentialgleichung, oder, was im Wesentlichen dasselbe ist, als den Fall der gewöhnlichen Riccati'schen Differentialgleichung kennen gelernt haben.

Die gewöhnliche Riccatische Differentialgleichung ist, wie wir lernten, die Differentialresolvente (Factor) folgender linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2u}{dz^2} = z^m u,$$

und diese Diff. Gl. geht durch eine leichte Umformung in die folgende über, eben die Bessel'sche Differentialgleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

wobei

$$n = \frac{1}{m+2} \quad \text{gesetzt ist.}$$

Nun wird die Theorie dieser Differentialgleichung in den gewöhnlichen Lehrbüchern immer so behandelt, daß man Werte für n gibt, für welche die Differentialgleichung durch niedere Functionen integrirbar ist. Man findet da, daß in der That die Gleichung auf niedere Functionen, und zwar auf trigonometrische Functionen führt, wenn m die Gestalt hat

$$m = \frac{-4k}{2k \pm 1},$$

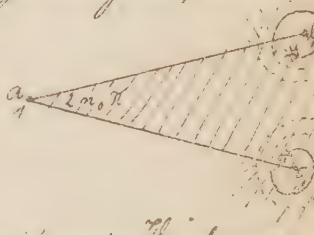
unter k irgend eine ganze Zahl verstanden.

Die Integration wird in diesem Falle durch ein Recursionsverfahren bewerkstelligt, durch welche die Constante m auf 0 heruntergebracht wird.

Was ist nun der innere Sinn dieses Recursionsverfahrens? und gibt es nicht vielleicht auch noch andere Fälle, in denen man auf niedere Functionen geführt wird?

Beide Fragen pflegen in den Lehrbüchern mit Stillschweigen übergangen zu werden, obwohl die zweite Frage bereits von Liouville in Liouville's Journal Bd. 6 1841 beantwortet worden ist. Liouville zeigt nämlich mit Hülfe von Reihenentwicklungen, daß es in der That keine weitern integrablen Fälle gibt.

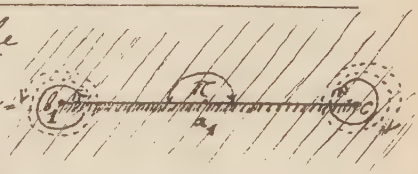
Wir können uns nun mit unsern geometrischen Methoden leicht den innern Sinn des Reductionsverfahrens der Lehrbücher klar machen. Wir wissen, daß ein reducirtes Dreieck der zugehörigen η-Function die in nebenstehender Figur angedeutete Gestalt hat, mit einem endlichen Winkel $2n_0\pi$, zwei von ihm auslaufenden Seiten $a_1 b_1$ und $a_1 c_1$ und mit zwei Windungs-



punkten unendlich hoher Ordnung in b_1 und c_1. Aus diesem Dreieck und seinem Nebendreieck erhält man nun das allgemeinste zu irgend einem Werte $n = \pm k + n_0$ gehörige Dreieck, indem man an die Seiten $a_1 b_1$ und $a_1 c_1$ im Ganzen k Halbebenen lateral anhängt. Man erhält so eine Reihe verwandter Dreiecke, welche von dem reducirten Dreieck zum allgemeinen Dreieck führen, ganz wie im regulären Fall. Und nun zeigt sich:

Das gewöhnliche Recursionsverfahren, welches man bei der Behandlung der Riccatischen Gleichung in Ansatz bringt, bedeutet nichts anderes, als daß man die Reihenfolge der verwandten Besselschen Functionen bis hin zur Minimalfunction durchläuft.

Die Entwicklungen der Lehrbücher kommen nun darauf hinaus, daß die Besselsche Figur nach Abtrennung der lateralen Anhängungen kann und nur dann auf gewöhnliche Functionen führt, wenn der Winkel bei $a_1 = \pi$, also $n_0 = \frac{1}{2}$ ist, wo dann einfach die Verzweigung des Logarithmus vorliegt, also die Formel



$$x = \log . \frac{\eta - b_1}{\eta - c_1}$$

Wir sehen, wie übersichtlich und naturnotwendig sich bei unserer Behandlungsweise das darstellt, was gewöhnlich nur als ein wunderbarer Kunstgriff erscheint.

Überhaupt scheint es nützlich zu sein, eine Darstellung der Theorie der Bessel'schen Functionen zu geben, bei welcher die letztere durchweg als ein Grenzfall der Theorie der η-Function erscheint. –

Wir haben hiermit die Frage nach der Zurückführung der η-Function auf niedere Functionen zu Ende gebracht.

Jetzt wollen wir unsere Dreiecksfiguren nach einer anderen Seite zur Geltung bringen, indem wir uns fragen, wann ist die Function $\eta(x)$ eindeutig umkehrbar, d.h. wann ist x eine eindeutige Function von η?

Es ist dies ein specieller Fall einer ganz allgemeinen Fragestellung der Functionentheorie, welche darauf hinausgeht, das Rechnen mit mehrdeutigen Functionen möglichst zu vermeiden. Hat man überhaupt eine functionale Abhängigkeit $y(x)$ bei der einem Werte von x mehrere, vielleicht unendlich viele Werte von y und umgekehrt einem Werte von y mehrere Werte von x entsprechen, dann kann man allemal

fragen, ob es nicht eine dritte Größe η gibt, von der sowohl y wie x eindeutige Functionen sind? Man denke nur an das Beispiel der elliptischen Functionen, wo nicht nur die algebraischen Functionen einer Riemann'schen Fläche, sondern auch die Integrale 1. und 2. Gattung als eindeutige Functionen einer dritten Größe, des Integrals 1. Gattung ausgedrückt werden. Wir sagen also:

Es ist eine allgemeine Aufgabe der Analysis, bei der Discussion analytischer Beziehungen jedesmal eine „uniformisirende Hilfsvariable" aufzufinden.

Wir unsere speciellen Problemstellung handelt es sich darum, zu untersuchen, wann η selbst als uniformisirende Variable brauchbar ist. Es zeigt sich, daß das in der That in einer großen Anzahl von Fällen der Fall ist. Wir werden weiterhin sogar sehen, daß auch da, wo η selbst nicht brauchbar ist, doch eine andere η-Function $\eta(x)$ zum Ziele führt.

Jetzt also handelt es sich um die Frage, wann x eine eindeutige Function von η sein kann. Es ergibt sich sofort als notwendige Bedingung:

Wenn $\eta(x)$ eindeutig umkehrbar sein soll, so müssen λ, μ, ν gewiß reell sein.

Denn wäre etwa λ complex, so wäre nicht nur $\eta - a_1 = (x-a)^{\lambda} \mathfrak{P}(x-a)$, sondern auch $(x-a) = (\eta - a_1)^{1/\lambda} \cdot \mathfrak{P}(\eta - a_1)^{\frac{1}{\lambda}}$ eine an der Stelle a_1 von unendlich hoher Ordnung verzweigte, also gewiß nicht eindeutige Function.

Da also nur reelle λ, μ, ν in Betracht kommen, brauchen wir uns mit den allgemeinen η-Bereichen bei der vorliegenden Fragestellung gar nicht zu beschäftigen, sondern können uns von vornherein auf den Fall beschränken, wo die positive Halbebene x auf ein gewöhnliches Kreisbogendreieck abgebildet wird.

Hier treten also unsere Figuren in ihr Recht. In der That ist geometrisch leicht zu sehen, welches die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß x eine eindeutige Function von η sei. Man denke sich das Kreisbogendreieck der η-Ebene, das conforme Abbild der positiven x-Halbebene, symmetrisch vervielfältigt, so oft es möglich ist. Man erhält so eine endliche oder unendliche Zahl abwechselnd schraffirter und nichtschraffirter Dreiecke. Soll nun x eine eindeutige Function von η sein, so darf kein Punkt der η-Ebene zugleich in mehreren Dreiecken, oder auch nur zugleich an mehre-

Stellen desselben Dreiecks liegen. Das zweite wäre der Fall, wenn ein einzelnes Dreieck die Ebene oder einen Teil derselben mehrfach überdeckte, das erste, wenn die aneinandergefügt gedachten Dreiecksmembranen irgendwo übereinandergreifen würden. Beides muss also ausgeschlossen sein, was in der einen Forderung ausgesprochen ist, dass die Gesamtheit der aneinandergefügten Dreiecksmembranen die Ebene nirgends mehrfach überdecken soll. Umgekehrt, wenn diese Forderung erfüllt ist, so entsprechen keinem η mehrere Werte von x, d.h. x ist eine eindeutige Function von η. Man hat also den Satz:

x wird dann und nur dann eine eindeutige Function von η sein, wenn das Anfangsdreieck zusammen mit allen Dreiecken, die aus ihm durch „Symmetrie" entstehen, nirgendwo eine mehrfache Überdeckung der Ebene liefert.

Nun fragt es sich, ob es solche Dreiecke gibt, die bei ihrer Vervielfältigung diese Eigenschaft zeigen?

In der That haben wir bereits solche Dreiecke kennen gelernt:

Das Elementardreieck des Ikosaeders mit den Winkeln $\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ gibt uns ein Beispiel dafür, dass der fragliche Fall möglich ist. Da hat man im Ganzen

120 Dreiecke, welche die Kugel einfach überdecken und dementsprechend ist x wirklich eine eindeutige Function von η, nämlich eine rationale Function 60ten Grades.

$$x = R_{60}(\eta).$$

Leicht sind alle diejenigen Fälle aufzuzählen, in denen, wie beim Ikosaeder, eine schlichte Überdeckung der η-Kugel mit einer endlichen Anzahl von Dreiecken herauskommt, und in denen also x eine rationale Function von η ist; es sind einfach die Elementardreiecke unserer 6 Typen von algebraischen η-Functionen, nämlich

1) $1, 1, 1$; 2) $1, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$; 3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{m}$; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

In allen diesen Fällen, und nur in diesen ist

$$x = R(\eta).$$

In jedem Falle sehen wir, daß λ, μ, ν reciproke Werte ganzer Zahlen sind

$$\lambda = \frac{1}{L}, \quad \mu = \frac{1}{M}, \quad \nu = \frac{1}{N},$$

wie dies von vornherein als notwendig zu erkennen ist. Nämlich ist die Summe der Exponenten $\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right) > 1$, da überall der Fall I. vorliegt, und zwar sieht man, wenn man nur auf die Fälle achtet, wo keiner der Exponenten eine ganze Zahl ist, also auf die Fälle 3)–6), daß die aufgezählten Zusammenstellungen gerade

alle Möglichkeiten erschöpfen, wie man drei ganze Zahlen, welche > 1 sind, wählen kann, so daß die Bedingung $\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} > 1$ erfüllt ist. Also:

Unsere Fälle 3.)-6) entsprechen genau den verschiedenen Möglichkeiten, der Ungleichung

$$\frac{1}{L} + \frac{1}{M} + \frac{1}{N} > 1$$

durch drei ganze Zahlen zu genügen, welche größer als 1 sind.

Von den möglichen Lösungen der Ungleichung, in denen eine oder mehrere der Zahlen $L, M, N = 1$ sind, kommen einige (z.B. $1, 1, \frac{1}{n}$; $1, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$) deswegen nicht vor, weil bei einem ganzzahligen Exponenten, wie 1, möglicherweise logarithmische Glieder auftreten können.

Gehen wir nun von unsern zum Falle I gehörigen Dreiecken zu den Fällen II und III über, wo für das Minimaldreieck $\lambda + \mu + \nu = 1$ bezw. < 1 ist, so müssen λ, μ, ν natürlich, wie im Falle I, die reciproken Werte ganzer Zahlen sein, weil sonst die nebeneinanderliegenden Dreiecke schon in den Ecken übereinandergreifen müssten. Aber ich sage, daß umgekehrt immer eine einfache Überdeckung der Ebene vorliegt, wenn λ, μ, ν die Form $\frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \frac{1}{N}$ haben — wenigstens immer, wenn L, M, N alle > 1 sind.

Sehen wir der Kürze halber von diesem etwa-gen Ausnahmefall ab, so dürfen wir also den Satz aussprechen:

Es zeigt sich, daß auch in den Fällen II und III allemal eindeutige Umkehrbarkeit statt hat, sobald $\lambda = \frac{1}{\mathfrak{L}}$, $\mu = \frac{1}{\mathfrak{M}}$, $\nu = \frac{1}{\mathfrak{N}}$ gesetzt wird, unter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ganze Zahlen verstanden. Dabei gilt ∞ ebenfalls als ganze Zahl.

Der Fall II läßt sich dabei noch in der Weise vollständig discutiren, daß man alle ganzzahligen Lösungen der Diophantischen Gleichung

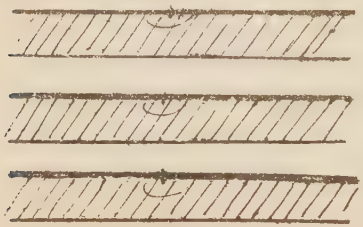
$$\frac{1}{\mathfrak{L}} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{\mathfrak{N}} = 1$$

aufsucht. Man findet

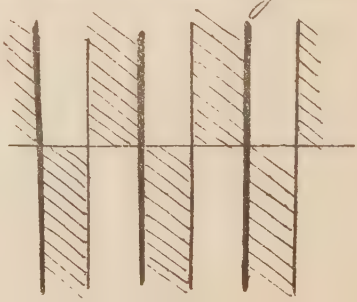
1) $1, 0, 0$; 2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$; 3) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$; 4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$;

und in der That entspricht jeder dieser Exponenten-zusammenstellung eine schlichte Überdeckung der Ebene mit Dreiecken, jetzt freilich in unendlicher Anzahl; so daß x eine zwar noch eindeutige, aber transcendente Function von η wird.

Die den Fällen 1) und 2) entsprechenden Figuren sind folgende:



1)

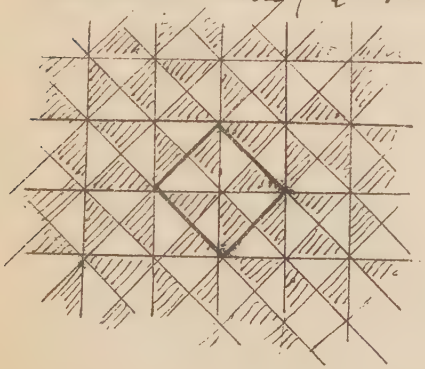


2)

Die zugehörigen eindeutigen transcendenten Functionen $x(\eta)$ sind $x = e^{\eta}$ und $x = \sin \eta$. Wir könnten die beiden beschriebenen Fälle als Ausartung des Kreis=teilungstypus $(1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ und des Diedertypus $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n})$ für unendlich wachsendes n ansehen, und demge=mäß als „unendlich hohen Kreisteilungstypus" und als „unendlich hohen Diedertypus" benennen.

Beidemal sind wir zu einer einfach periodischen Function gekommen, entsprechend der geometrischen Thatsache, daß beide Figuren aus der Nebeneinander=lagerung congruenter Streifen entstehen (in den Figuren mit starken Linien abgegrenzt.)

Anders ist es in den Fällen 3)–5). Hier erhal=ten wir nicht mehr einfach periodische, sondern doppeltperiodische Functionen, wie ein Blick auf die Figuren in Klein-Fricke: Modulfunctionen I S. 107 zeigt. Wir wollen hier nur die Figur wiedergeben, die dem Falle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ entspricht. Man sieht, daß



man in der That die ganze Einteilung der Ebene durch congruente Verschiebung des stark umzogenen Qua=drats in der Richtung der einen oder andern seiner

Kanten erzeugt denken kann.
$x(\eta)$ ist in diesem Falle eine lemniscatische Function von η.

Ähnlich ist es in den andern Fällen 3) und 5). Jedesmal erhält man elliptische Functionen mit speciellen Moduln.

Im Falle II sind wir also immer noch im Bereiche der bekannten Functionen geblieben, wenn wir auch das Gebiet der rationalen Functionen verliessen. Zu ganz neuen Functionen höchst merkwürdigen Charakters gelangt man aber durch Umkehrung der η-Functionen des Falles III. Diese neuen Functionen sind zuerst von Schwarz in einer oft gesuchten Arbeit gegeben: Es scheint mir dies eine Leistung die sich mindestens gleichwertig neben die genaue Aufzählung der algebraischen η stellt. Die Schwarz'sche Arbeit ist dadurch zum Vorläufer aller der späteren Arbeiten, insbesondere von Poincaré, über eindeutige transcendente Functionen mit linearen Transformationen in sich geworden:

Wir sagen:

Um die Umkehrung der η-Function eindeutig zu machen genügt es auch im Falle III

$$\lambda = \frac{1}{L}, \quad \mu = \frac{1}{M}, \quad \nu = \frac{1}{N}$$

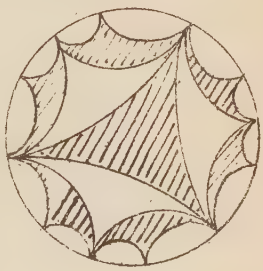
zu setzen; es gibt aber jetzt nicht eine endliche, sondern eine unendliche Anzahl von Wertesystemen, für welche

$$\frac{1}{\mathcal{L}} + \frac{1}{\mathcal{M}} + \frac{1}{\mathcal{N}} < 1$$

ist. Es ist zu zeigen, daß jedes dieser unendlich vielen Wertsysteme mit eindeutiger Umkehrbarkeit der zugehörigen Function $\eta\left(\frac{1}{\mathcal{L}}, \frac{1}{\mathcal{M}}, \frac{1}{\mathcal{N}}; x\right)$ verbunden ist.

Ein specieller Fall, nämlich $\mathcal{L} = \mathcal{M} = \mathcal{N} = \infty$, also die Function $x(\eta)$, welche durch Umkehrung von $\eta(0, 0, 0; x)$ entsteht, war von Seiten der analytischen Darstellung schon länger bekannt, wenn man sich auch über ihren functionentheoretischen Character erst seit Schwarz' Untersuchung klar geworden ist. Es ist die sogenannte <u>elliptische Modulfunction</u>.

Das Dreieck der elliptischen Modulfunction hat die Winkel 0, 0, 0. Es existirt ein durch seine drei Ecken gehender Kreis, auf welchem alle drei Seiten senkrecht stehen. Dieser Orthogonalkreis geht in sich selbst über, wenn ich die η-Ebene durch Spiegelung an irgend einer Seite des Dreiecks umforme, und zwar so, daß das Innere des Orthogonalkreises in sich und das äußere



in sich transformirt wird. So oft ich also das Dreieck durch Spiegelung vervielfältigen mag, ich kann nie aus dem Innern des Orthogonalkreises herausgelangen. Wohl aber kann ich das ganze Innere bis in beliebige Nähe der Peripherie mit Dreiecken ausfüllen. Bei Annäherung an den Orthogonalkreis drängen sich die einzelnen Dreiecke immer dichter, indem sie zugleich immer kleiner werden; der Orthogonalkreis ist die „natürliche Grenze" der Function $x(\eta)$, über welchen hinaus die Function auf keine Weise analytisch fortgesetzt werden kann. Also: x wird eine transcendente eindeutige Function von η, welche aber nur im Innern eines Grenzkreises existirt, wie man daraus erkennt, daß bei der Reproduction der Dreiecke sich diese beim Anschreiten auf den Orthogonalkreis immer mehr häufen.

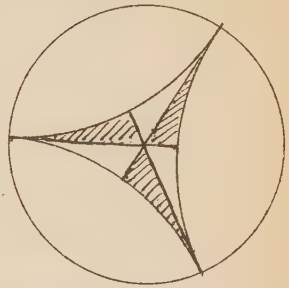
Ganz ähnlich liegen die übrigen Fälle $\lambda = \frac{1}{2}$, .. mit $\lambda + \mu + \nu < 1$:

Jedesmal ist x eine eindeutige Function von η, welche aber nur im Innern des zum Dreieck λ, μ, ν gehörigen Orthogonalkreises existirt. (Frei. d. 2. März.)

Ich gebe heute noch eine zweite Figur für die eindeutigen $x(\eta)$ mit Grenzkreis.

Man denke sich das Ausgangsdreieck der gestrigen

Figur durch seine drei Höhen zerlegt. Dadurch zerfällt es in 6 Dreiecke mit den Winkelzahlen $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Diese schraffire man abwechselnd und vervielfältige die Figur, wie gestern, durch Spiegelung an den Seiten des großen Dreiecks. Man wird ebenfalls eine schlichte Überdeckung der Ebene mit Dreiecken bekommen, und zwar wieder nur im Innern des Orthogonalkreises, welcher nicht nur für die großen Dreiecke $(0, 0, 0)$, sondern auch für die kleinen Dreiecke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0)$ Orthogonalkreis ist. Weiter ausgeführt ist die Figur in Modulfunctionen I S. 112 und weiterhin, indem eigentlich diese Figur die Grundlage für meine Behandlung der Modulfunctionen bildet.)



Daselbst findet man auch auf S. 109 die Figur für die Winkelzahlen $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7})$.

Wie wird man nun alle diese Functionen $x(\eta)$ für $(\frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \frac{1}{N})$ analytisch charakterisiren?

Das beliebig zu wählende Ausgangsdreieck geht in irgend ein anderes schraffirtes Dreieck der Figur, etwa in das i^{te} Dreieck – nach Festsetzung einer beliebigen Nummerirung der Dreiecke – durch eine

bestimmte lineare Substitution $\eta := \frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}$ über. Zwei entsprechende Punkte der beiden Dreiecke, d. h. zwei Punkte, von welchen der eine aus dem andern durch die genannte Substitution hervorgeht, entsprechen aber demselben Punkte der x-Ebene; es gilt also die Functionalgleichung:

$$x\left(\frac{\alpha_i \eta + \beta_i}{\gamma_i \eta + \delta_i}\right) = x(\eta)$$

und zwar für unendlich viele Zahlensysteme $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$, entsprechend den unendlich vielen Dreiecken im Innern des Grenzkreises. Also werden wir folgendermaßen sagen dürfen:

x ist eine eindeutige Function von η, welche durch ein bestimmtes discontinuirliches System von unendlich vielen linearen Substitutionen in sich übergeht.

Die eindeutige Function $x(\eta)$, welche wir hier finden, ist ein erstes Beispiel für die Classe der automorphen Functionen.

Es ist nun eine naheliegende Frage, wie die Coefficienten der einzelnen Substitutionen lauten? Man kann natürlich ohne Schwierigkeit für die erzeugenden Substitutionen der Gruppe die Coefficienten wirklich berechnen und dann diese

Substitutionen beliebig oft mit einander combiniren und die Coefficienten der so erhaltenen weiteren Substitutionen berechnen. Das führt aber schon bei Multiplication weniger Substitutionen zu so complicirten Formeln, daß die Rechnung bald ganz undurchführbar wird, und eine Übersicht auf keine Weise zu gewinnen ist. Man will aber das arithmetische Bildungsgesetz aller Substitutionen gleichzeitig haben. Darüber ist zu sagen:

Das arithmetische Bildungsgesetz der Coefficienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ welches bei den allgemeinen Dreiecksfunctionen in Betracht kommt, ist noch unbekannt. Erst in neuester Zeit sind durch Fricke eine Reihe einzelner Fälle mit Erfolg behandelt worden.

Ebenso unvollständig wird mein Bericht, wenn wir uns zu der Frage wenden, wie man x als Function von y darstellen kann? In der Hinsicht hat Poincaré Reihen aufgestellt, die wir als „Poincaré'sche Reihen" bezeichnen wollen. Aber wir sind der Meinung, daß diese Poincaré-schen Reihen nur etwas vorläufiges sind, daß sie nicht die endgültige Lösung des Problems enthalten.

Die Sache wird wohl folgendermaßen formentheoretisch anzugreifen sein.

Wenn wir η in richtiger Weise in $\eta_1 : \eta_2$ spalten, so werden η_1, η_2 Formen vom Grade $\frac{\lambda+\mu+\nu-1}{2}$ in x_1, x_2, d.h. also umgekehrt: x_1, x_2 werden Formen von η_1, η_2 vom Grade $\frac{2}{\lambda+\mu+\nu-1}$ – übrigens in den uns hier beschäftigenden Fällen immer eine negative Zahl –. Wir werden dann das Problem so zu stellen haben:

Wir verlangen x_1, x_2 als Formen vom Grade $\frac{2}{\lambda+\mu+\nu-1}$ von η_1, η_2 darzustellen.

Aber mehr als das: Seien a, b, c die den Dreiecksecken λ, μ, ν entsprechenden Verzweigungspunkte der x-Ebene.

Dann werden die Determinanten $(xa), (xb), (xc)$ nur an den entsprechenden Ecken der Dreiecksein-teilung der η-Ebene verschwinden, und zwar in der Ordnung $\frac{1}{\lambda} = \mathcal{L}$, $\frac{1}{\mu} = \mathcal{M}$, $\frac{1}{\nu} = \mathcal{N}$. Es werden also nicht nur die Determinanten selbst, sondern auch noch die Wurzeln

$$\sqrt[\mathcal{L}]{(xa)}, \quad \sqrt[\mathcal{M}]{(xb)}, \quad \sqrt[\mathcal{N}]{(xc)}$$

in der η-Ebene unverzweigte Formen von η_1, η_2 sein:

$$\sqrt[\mathcal{L}]{(xa)} = \Phi(\eta_1 \eta_2), \quad \sqrt[\mathcal{M}]{(xb)} = \Lambda(\eta_1 \eta_2), \quad \sqrt[\mathcal{N}]{(xc)} = \Psi(\eta_1 \eta_2),$$

wobei man den Grad dieser drei Formen sofort angeben

kann. Im Falle des Ikosaeders haben wir diese drei Formen wirklich explicit angegeben, nämlich H, f, T, und wir haben gesehen, wie schön sich vermittelst derselben alle Untersuchungen gestalteten.

Wir werden also auch bei den allgemeineren Dreiecksfunctionen geradezu verlangen, die drei Formen $\Phi(\eta_1 \eta_2)$, $X(\eta_1 \eta_2)$, $\Psi(\eta_1 \eta_2)$ aufzustellen, welche gleich $\overset{P}{V}(xa)$, $\overset{M}{V}(xb)$ $\overset{N}{V}(xc)$ sind.

Dies ist aber noch keineswegs ausgeführt. Näheres darüber, insbesondere Litteraturangaben, findet man bei Ritter, Math. Ann. 41, 1892. Einige specielle Fälle werden wirklich dargestellt von Burkhardt in Math. Ann. 42. 1892-93.

Aber, mögen wir eine explicite Darstellung kennen oder nicht, immer steht fest, daß in allen den Fällen, von denen wir hier sprechen, x eine eindeutige Function von η ist.

Ist $\lambda = \frac{1}{l}$, $\mu = \frac{1}{m}$, $\nu = \frac{1}{n}$, so ist η selbst die uniformisirende Variable, d.h. $x(\eta)$ ist in η eindeutig.

Wie finden wir jetzt in höheren Fällen der η-Function, wo λ, μ, ν beliebige Brüche, vielleicht gar irrationale oder complexe Zahlen sind, eine solche eindeutigmachende Variable?

Ich behaupte:

Die besprochenen ausgezeichneten η sind auch für die anderen η die uniformisirenden Variablen, mit ihrer Hülfe also lassen sich nicht nur x, sondern auch die anderen η eindeutig ausdrücken.

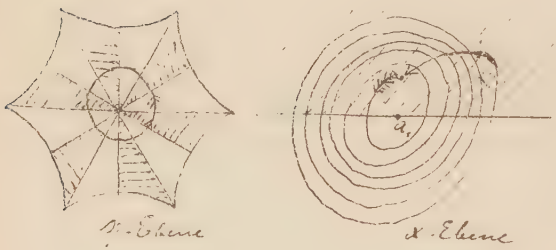
Wir nehmen einen besonderen Fall vorweg.

Es liege eine η-Function mit gebrochenen Exponenten vor:

$$\eta'\left(\frac{L'}{L}, \frac{M'}{M}, \frac{N'}{N}, x\right)$$

Ich behaupte, daß diese η-Function eine eindeutige Function des folgenden ausgezeichneten η ist:

$$\eta\left(\frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \frac{1}{N}, x\right).$$



Sei etwa a der Verzweigungspunkt der x-Ebene zu welchem der Exponent $\frac{1}{L}$ resp. $\frac{L'}{L}$ gehört.

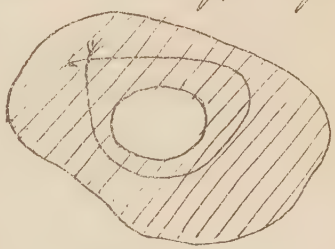
Lassen wir in der η-Ebene die Variable η einen Umlauf um eine Ecke λ machen, in welcher L Paare abwechselnd schraffirter und nichtschraffirter η-Dreiecke zusammenstoßen, so muß gleichzeitig die Variable x L Umläufe um den Punkt a der x-Ebene machen. Nun verhält sich aber ein Zweig der andern η-Function η' an der Stelle a der x-Ebene wie

$(x-a)^{\frac{k}{l}} \cdot \varphi(x-a)$. Wenn x l Umläufe um a macht, so bleibt dieser Ausdruck ungeändert; und was in dieser Hinsicht für den speciellen Zweig der η-Function gilt, gilt auch für den allgemeinen Zweig. Also ergibt sich, daß η' ungeändert bleibt, wenn η in seiner Ebene einen Umlauf um eine Ecke λ macht, d. h. daß η' als Function von η an den Ecken λ unverzweigt ist. Genau dasselbe wie für die Ecken λ, gilt auch für die Ecken u und v. Also haben wir als erstes Resultat:

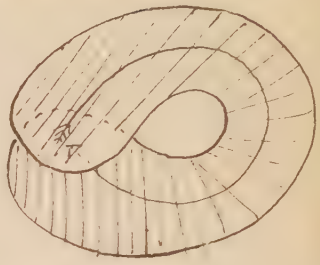
<u>η' ist als Function von η im ganzen Gebiet der Variablen η unverzweigt</u>

Nun sage ich, daß infolgedessen η' ~~eine~~ eindeutige Function von η ist.

Dieser Schluß gilt hier deswegen, weil das Gebiet der Variablen η einfachen Zusammenhang hat und nirgends über sich selbst hinübergreift. Denn hätte das Gebiet mehrfachen Zusammenhang, wäre es etwa ringförmig, so könnte man möglicherweise durch einen Umlauf um die innere Öffnung des Gebietes zu einem anderen Functionszweig gelangen, da sich der Weg nicht auf einen Punkt zusammenziehen läßt.



Ähnlich wäre es, wenn das Gebiet über sich selbst hinübergriffe. dann könnte man von einem Wert des η wieder zu demselben Wert des η gelangen, ohne doch wieder an derselben Stelle des Gebietes zu sein.



Beides ist aber bei unserer Variablen η nicht der Fall; denn ihr Gebiet ist, sofern es sich nicht um eine schlichte Ueberdeckung der ganzen Kugelfläche handelt, einfach das Innere eines Kreises.

Wir schließen also:

Aus der Unverzweigtheit der Function $\eta'(\eta)$ folgt im vorliegenden Falle die Eindeutigkeit der Function, weil nämlich das Gebiet der Variablen η in allen Fällen einfach zusammenhängend ist und die η-Ebene nirgends mehrfach überdeckt.

Nun wollen wir ein Beispiel betrachten, wo wir eine Function η' durch eine Function η wirklich explicit eindeutig darstellen können.

Wir wählen als Function η die zum Elementardreieck $(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2})$ des Ikosaeders gehörige Function:

$$\eta\left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{2}, x\right).$$

Wir wissen jetzt, daß jedes η folgender Form:

$$\eta\left(\frac{L'}{3}, \frac{M'}{5}, \frac{N'}{2}, x\right)$$

durch das zum Elementardreieck gehörige η eindeutig, also hier, wo es sich nur um algebraische Beziehungen handelt, rational darstellbar sein muß.

Wir wollen nun zusehen, welche unter den unendlich vielen Ikosaederdreiecken so beschaffen sind, daß sie zum Elementardreieck in der gewollten Beziehung stehen, daß also λ', μ', ν' die Form $\frac{L'}{3}, \frac{M'}{5}, \frac{N'}{2}$ haben.

Eine erste Reihe von Beispielen wird durch die sämtlichen verwandten Functionen der Elementarfunction gebildet. Aber diese haben wir schon neulich rational durch das Elementar-η ausgedrückt, und wir brauchen also jetzt nicht darauf zurückzukommen.

Aber es gibt beim Ikosaeder auch noch andere η-Functionen, deren Exponenten die Gestalt $\frac{L'}{3}, \frac{M'}{5}, \frac{N'}{2}$ haben. Wir brauchen nur z. B. an das aus 7 Elementardreiecken bestehende Minimaldreieck $(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2})$ zu denken. Ebenso haben natürlich die hiermit verwandten Dreiecke als Nenner der Winkelzahlen die Zahlen 3, 5, 2. Wir sagen also:

$\eta(\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, x)$ und seine verwandten Functionen bilden eine neue Serie von η-Functionen, welche sich durch $\eta(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, x)$ rational darstellen lassen müssen.

Die Formeln für diese eindeutige Darstellung findet

man bei Fischer. Wir geben hier einen kurzen Bericht.

Man wird η und η' beide in der früher geschilderten Weise je in zwei ganze und teilerfremde π-Formen spalten, welche wir als homogene Variablen benutzen.

$$\eta = \eta_1 : \eta_2 , \quad \eta' = \eta_1' : \eta_2' ,$$

und wir werden nun anzusetzen haben:

$$\eta_1' = \varphi_n(\eta_1, \eta_2), \quad \eta_2' = \psi_n(\eta_1, \eta_2) ,$$

unter φ, ψ ganze rationale Formen n^{ten} Grades verstanden, wobei n die Anzahl der im Kreise η' enthaltenen η-Dreiecke vorstellt.

Wir werden außer dem Minimaldreieck $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ noch die drei Eckendreiecke hier mit in Betracht ziehen, die Winkelsummen und die Seiten a die an η grenzenden lauten:

α, β, γ =	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$
n =	7	13	17	23

Für jedes dieser Dreiecke haben wir ein Formenpaar φ, ψ je vom Grade n anzusetzen, und zwar sind die Koeffizienten so zu wählen, daß φ und ψ gegenüber den Kreisverschiebungen der η_1, η_2 ein bestimmtes charakteristisches Verhalten zeigen.

Wenn man nämlich η irgend welche geschlossenen Umläufe machen läßt, so erleidet sowohl η, wie $\eta' = \frac{\varphi}{\psi}$ die Kreisverschiebungen, aber beide Variablen

in verschiedener Reihenfolge. Wenn man also η den Ikosaedersubstitutionen unterwirft, so müssen φ und ψ derart beschaffen sein, daß $\eta' = \frac{\varphi}{\psi}$ ebenfalls die Ikosaedersubstitutionen erleidet, nur in anderer Reihenfolge. Die Coefficienten der Ikosaedersubstitutionen lassen sich alle rational durch $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ausdrücken (vergl. Ik. S. 43), und man stellt sich das gegenseitige Entsprechen der Substitutionen von η und speciell derjenigen von η' $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$ so, daß man aus jeder Substitution von η die entsprechende von η' erhält, indem man ε durch ε^2 ersetzt.

Die Substitutionen, welche η' im Kreisteilen des ε erleiden, sind ebenfalls Ikosaedersubstitutionen, sie sind aber mit den Substitutionen des η im Einzelnen nicht identisch, sondern ergeben sich aus ihnen (bei Zugrundelegung des von uns in der Ikosaedertheorie immerfort benutzten Coordinatensystems) indem man überall ε durch ε^2 ersetzt.

Jordan hat ein solches Verhalten als contragredient bezeichnet (Math. Ann. 13 1878).

Dies überträgt sich auch auf die homogenen Ikosaedersubstitutionen; es kommt also Folgendes heraus:

Die φ_n und ψ_n sind nicht beliebige ganzzahlige Formen n^{ten} Grades, sondern sie müssen so gebildet

sein, daß sie zu η_1, η_2 sich contragredient verhalten.

Wir haben so eine rein algebraische Aufgabe in erster Linie zu erledigen, nämlich alle Formenpaare φ_n ψ_n aufzustellen, welche sich zu η_1, η_2 contragredient verhalten.

Da stellen sich nun ganz ähnliche Verhältnisse ein, wie früher bei der Aufsuchung cogredienter Formensysteme:

Nach dem Beweise von Gordan bauen sich die allgemeinsten contragredienten φ' ψ' aus 4 Grundpaaren φ, ψ; φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2; φ_3, ψ_3 mit Hülfe invarianter Multiplicatoren $\mathfrak{G}$ in folgender Weise auf:

$$\varphi' = \mathfrak{G}\varphi + \mathfrak{G}_1\varphi_1 + \mathfrak{G}_2\varphi_2 + \mathfrak{G}_3\varphi_3,$$

$$\psi' = \mathfrak{G}\psi + \mathfrak{G}_1\psi_1 + \mathfrak{G}_2\psi_2 + \mathfrak{G}_3\psi_3.$$

Dabei sind die Grundformen φ, ψ u. s. w. durch folgende Formeln gegeben (vergl. Fischer S. 63):

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \eta_1^7 - 7\eta_1^2\eta_2^5 \\ \psi &= 7\eta_1^5\eta_2^2 + \eta_2^7 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 26\eta_1^{10}\eta_2^3 - 39\eta_1^5\eta_2^8 - \eta_2^{13} \\ \psi_1 &= \eta_1^{13} - 39\eta_1^8\eta_2^5 - 26\eta_1^3\eta_2^{10} \end{aligned}\right\}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_2 &= \eta_1^{17} + 119\eta_1^2\eta_2^5 + 187\eta_1^7\eta_2^{10} + 17\eta_1^2\eta_2^{15} \\ \psi_2 &= 17\eta_1^{15}\eta_2^2 + 187\eta_1^{10}\eta_2^7 - 119\eta_1^5\eta_2^{12} + \eta_2^{17} \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} \varphi_3 &= -46\eta_1^{20}\eta_2^5 + 1173\eta_1^{15}\eta_2^8 + 341\eta_1^{10}\eta_2^{13} + 207\eta_1^5\eta_2^{18} \\ \psi_3 &= \eta_1^{23} + 207\eta_1^{18}\eta_2^5 - 341\eta_1^{13}\eta_2^{10} + 1173\eta_1^8\eta_2^{15} + 46\eta_1^3\eta_2^{20} \end{aligned}\right.$$

Auf Grund des Gordan'schen Ansatzes verlangt die völlige Bestimmung der φ' ψ' für einen einzelnen Dreiecksfall nur noch die Festlegung derjenigen Constanten, welche in $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ bei gegebenem Grad enthalten sind, und

diese Festlegung der Constanten wird sich beispielsweise durch Heranziehen der hypergeometrischen Reihen für η_1', η_2' und η_1, η_2 ausführen lassen.

Insbesondere werden die φ', ψ' für das Minimaldreieck $n=7$ und seine drei Nebendreiecke $n=13, 17, 23$ ganz direct durch die Gordan'schen Grundformenpaare φ, ψ; φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2; φ_3, ψ_3 selbst gegeben.

Was wir so beim Ikosaeder durchgeführt haben, das wird man nun versuchen müssen, auch bei den allgemeineren transcendenten Dreiecksfunctionen zu leisten.

Wir werden auch da darauf ausgehen müssen, die zu einem Dreieck $\lambda' = \frac{\mathcal{L}'}{\mathcal{D}}$, $\mu' = \frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}}$, $\nu' = \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}}$ gehörigen Formen η_1', η_2' durch die Formen η_1, η_2 des Dreiecks $\lambda = \frac{1}{\mathcal{D}}$, $\mu = \frac{1}{\mathcal{M}}$, $\nu = \frac{1}{\mathcal{N}}$ eindeutig auszudrücken (wenn auch nicht mehr rational), durch Formeln der Art:

$$\eta_1' = \varphi_n(\eta_1 \eta_2), \quad \eta_2' = \psi_n(\eta_1 \eta_2),$$

wobei der Grad

$$n = \frac{\lambda' + \mu' + \nu' - 1}{\lambda + \mu + \nu - 1}$$

übrigens nicht mehr notwendig eine ganze Zahl ist.

Es kame darauf an, wirkliche analytisch brauchbare Darstellungen dieser ganzen transcendenten

Formen zu geben, wobei man alle verwandten Functionen zusammenfassen müßte.

Die besagten Formen zeigen gegenüber den zum η Dreieck gehörigen Substitutionen ein entsprechendes Verhalten, wie im Hosoeder Fall: sie erleiden selbst lineare Substitutionen, nämlich die zum Dreieck η gehörigen Substitutionen. Hiernach sind die beiden einander so entsprechenden Substitutionsgruppen im Allgemeinen verschiedene Gruppen, während [illegible] verschieden

[illegible]

Wir nennen solche Formen [illegible] P, Q solche [illegible]

[illegible]

[illegible] homomorf.

Was die analytische [illegible] betrifft, so hat wieder Poincaré (vergl. insbesondere Acta math. 5. 1884) gewisse Reihenentwicklungen angegeben. Aber es gilt von dieser dieselbe Bemerkung, welche wir zu seinen Reihen für die automorphen Formen machen mußten.

Die Poincaré'schen Reihen scheinen noch nicht das endgültige Bildungsgesetz für die Formen φ, ψ

zu enthalten.

Was die Einzelheiten betrifft, so verweise ich auf die Darstellung in meiner Vorlesung vom W. S. 90-91. Insbesondere wird man versuchen, diejenigen homomorphen Formen, welche zu den η_1', η_2' einer bestimmten Verwandschaft gehören, aus einer kleinen Zahl einfachster homomorpher Formen mit Hülfe automorpher Multiplicatoren linear zusammenzusetzen. (Ms. 6. März 94)

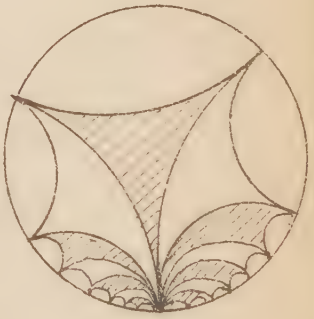
In der letzten Stunde haben wir als uniformisirende Variable für eine η-Function mit rationalen Exponenten $\eta'\left(\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}}, \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{M}}, \frac{\mathfrak{N}'}{\mathfrak{N}}, x\right)$ die Function $\eta\left(\frac{1}{\mathfrak{L}'}\frac{1}{\mathfrak{M}'}\frac{1}{\mathfrak{N}'}x\right)$ kennen gelernt. Daß dieses η als uniformisirende Variable für η' brauchbar ist, beruht, wie wir gesehen haben, darauf, daß, wenn η infolge irgend welcher Umläufe von x in seiner Ebene einen geschlossenen Umlauf macht; daß dann immer auch η' einen geschlossenen Umlauf macht, umgekehrt brauchen aber geschlossenen Umläufen der Variablen η' durchaus nicht geschlossene Umläufe von η zu entsprechen; wenn kann etwa sagen: η darf höchstens dann einen geschlossenen Umlauf machen, wenn gleichzeitig η' einen geschlossenen Umlauf macht.

Diese Bedingung ist aber, welches auch die Exponenten von η' sein mögen, gewiß immer erfüllt, wenn man

η so wählt, daß es in seiner Ebene überhaupt keine Umläufe macht.

Können wir ein derartiges η finden, welches eindeutig umkehrbar ist, und welches nie geschlossene Umläufe macht, welche Umläufe auch x um seine 3 singulären Punkte ausführen mag, so muß in diesem η jede beliebige Function $\eta(\lambda, \mu, \nu, x)$ eindeutig sein, auch wenn λ, μ, ν irrational oder complex sind. $\eta(\frac{1}{L}, \frac{1}{M}, \frac{1}{N}, x)$ geht aber nach L Umläufen des x um a wieder in sich selbst über; das gewünschte η soll aber nach keiner endlichen Zahl von Umläufen in sich übergehen; wir müssen also $L = \infty$ setzen, ebenso $M = \infty$ und $N = \infty$. Wir bekommen so die bekannte elliptische Modulfunction

$$\eta(0, 0, 0, x).$$



In der That erfüllt diese Function die gestellten Bedingungen, wie ein Blick auf die entsprechende Dreiecksteilung zeigt; denn da alle Dreiecke sich schlicht aneinanderlegen, so ist x in η eindeutig, und da die Ecken sämtlich auf dem Grenzkreis liegen, so ist kein Umlauf um dieselben möglich, vielmehr durchläuft man bei wiederholtem Umlauf des x um einen Verzweigungspunkt

der x-Ebene nur der Reihe nach die unendlich vielen in einer Ecke zusammenstoßenden Dreiecke. –

Lasse ich nun das Ausgangsdreieck dieser Modulteilung irgend einem Dreieck einer andern η'-Function entsprechen, so entspricht dem Übergang zu einem benachbarten Dreieck der η'-Function auch der Übergang zum benachbarten Dreieck der Modulteilung.

Wenn man auch in der η' Ebene irgend ein Dreieck, in das man so gelangt, über das Ausgangsdreieck hinübergreift, so kann dies mit dem entsprechenden Dreieck der η-Ebene doch nicht geschehen; d.h. aber, daß zwar ev. einem Werte von η' mehrere Werte von η entsprechen können, nicht aber einem Werte von η mehrere Werte von η'.

Wir haben also das wichtige Resultat:

Die Function $\eta(0, 0, 0, x)$ ist unter allen eindeutig umkehrbaren η-Functionen dadurch ausgezeichnet, daß an den Stellen $x = a$, $x = b$, $x = c$ immer unendlich viele Blätter der x-Ebene zusammenhängen bezw. an den Stellen $\eta = a_1$, $\eta = b_1$, $\eta = c_1$ immer unendlich viele Dreiecke zusammenstoßen.

Indem wir dieses $\eta(0, 0, 0, x)$ als unabhängige Variable einführen, wird nicht nur x und eine beschränkte Zahl anderer η-Functionen, sondern es

werden mit einem Schlage alle η-Functionen in eindeutige Functionen verwandelt.

Dieser Satz ist zuerst in Math. Ann. 14. 1878 S. 159 mitgetheilt. Sie sehen, welche Perspectiven sich an diesen Satz anschließen:

Sowie es gelingt, die Aussage unseres Satzes in wirkliche bequeme Formeln umzusetzen, so werden alle Beziehungen zwischen hypergeometrischen Functionen sich als rationale Identitäten darstellen.

Es ist das ganz ähnlich, wie man die sämmtlichen Beziehungen zwischen elliptischen Functionen, zu denen man sonst auf functionentheoretischem Wege gelangen mag, rein rechnerisch als ϑ-Relationen darstellen kann.

Wie diese explicite eindeutige Darstellung aller η [illegible] die Modulfunctionen betrifft, so wird [illegible] den Fall durch die Poincaré'schen [illegible] phen Reihen geleistet, jedoch sind diese Reihen zum Rechnen [illegible] als ein den ϑ-Reihen der [illegible] gleichwertiges Hülfsmittel gelten können. Wir wollen dies so formuliren:

Poincaré's kanamorphe Reihen sind noch zu schwerfällig, als daß man mit ihnen rechnen könnte.

Es fehlt noch die hier postulirte bequeme analytische Darstellung.

Was die Litteratur über diesen Gegenstand betrifft, so darf ich wieder auf meine Vorlesung vom W.S. 90/91 verweisen.

Ich beende hiermit überhaupt die Überlegungen ab, die ich hier recite λ, μ, ν anstellen wollte, um einst zum Schlusse rasche und morgen einiges wenige [illegible], um sich die Verhältnisse der [illegible] Abbildung modificiren, wenn man für λ, μ, ν auf andere Werte [illegible]. Doch kann ich in dieser Beziehung noch keine abschliessenden Resultate geben, weil Arbeiting hiermit noch nicht ganz zu Ende gekommen ist.

Zuerst betrachte ich den einfacheren Fall, wo λ, μ, ν außer reellen nur rein imaginäre Werte besitzen. In diesem Fall können wir nämlich ebenso, wie bei durchweg reellen λ, μ, ν von der Abbildung der positiven Halbebene durch einen Halbkreis ausgehen (wie dies auch Schwarz in seiner Arbeit andeutet.)

Wir wollen gleich den Fall annehmen, daß alle drei Exponenten rein imaginär sind, also

$$\lambda = i\lambda'', \quad \mu = i\mu'', \quad \nu = i\nu''.$$

Wir sehen dann, daß in der Differentialgleichung

$$[\eta] = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)} \left\{ \frac{\frac{1}{2}(1-\lambda^2)}{x-a}(a-b)(a-c) + \frac{\frac{1}{2}(1-\mu^2)}{x-b}(b-a)(b-c) + \frac{\frac{1}{2}(1-\nu^2)}{x-c}(c-a)(c-b) \right\}$$

die rechte Seite noch reell ist, ebenso wie es im Falle durchaus reeller λ, μ, ν der Fall war. Aus der Realität der rechten Seite haben wir aber seinerzeit geschlossen, daß irgend ein Segment der reellen x Axe in der η-Ebene sich auf einen Kreisbogen abbilden muß. Jene Schlußweise muß sich hier unverändert übertragen, und wir können also sagen:

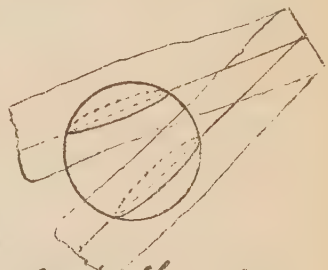
<u>Auch in unserm Falle rein imaginärer λ, μ, ν wird die positive Halbebene x auf eine von drei Kreisbogen begrenzte Figur abgebildet werden.</u>

Nun aber wissen wir, die 3 Kreisbogen in η-Ebene unter den Winkeln λ, μ, ν schneiden, d. h. jetzt mit rein imaginären Winkeln. Es erhebt sich demnach die Frage:

<u>Wie ist es möglich, daß zwei reelle Kreise rein imaginäre Winkel einschließen?</u>

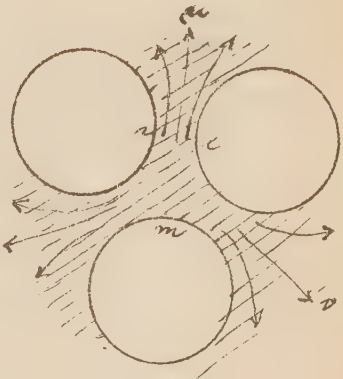
Erinnern wir uns an unsere Betrachtungen betr. die auf die η-Kugel als Fundamentalfläche bezogene nichteuklidische Maßbestimmung, so handelt es sich darum, wann zwei Ebenen, nämlich die Ebenen der

beiden Kreise, einen rein imaginären Winkel mit einander einschliessen? Wir wissen, dass dies der Fall ist, wenn die beiden Ebenen sich in einer Geraden schneiden, welche die Kugel selbst nicht durchsetzt. Dann liegen aber die beiden Kreise auf der Kugel, bezw. in der Ebene so zu einander, dass sie einander nicht schneiden.



Zwei Kreise der Ebene oder auf der Kugel, welche sich in Wirklichkeit nicht treffen, bilden im Sinne der nichteuklidischen Geometrie einen rein imaginären Winkel miteinander, indem es sich nämlich um den Winkel zweier Ebenen handelt, deren Schnittlinie ganz ausserhalb der Fundamentalkugel verläuft.

Unsere drei Kreise der η-Ebene liegen also ganz getrennt voneinander. Der centrale Teil unseres gesuchten Kreisbogendreiseits ist also durch den schraffirten Teil in der nebenstehender Figur gegeben. Wo aber liegen die drei Ecken unseres Bereichs? Um uns der Ecke λ zu nähern, müssen wir entweder auf dem Kreise m in positivem oder auf



am Kreise n in negativem Sinne, bezw. zwischen den beiden Kreisen in dem Sinne der Pfeile und bewegen. So weit wir aber auf der zwischen den Kreisen umlaufen, wir erreichen die Ecke i niemals, da die beiden Kreise ja einander nicht schneiden. Wir haben uns also in den schraffirten centralen Teil zwischen den Kreisen m und n eine unendlich oft zwischen den beiden Kreisen herumlaufende Ringfläche, auf der Kugel ein unendlich oft sich um dieselbe herumschlingendes Band, angehängt zu denken, welches über den dritten Kreis natürlich unbehindert hinweggreift. Ganz entsprechend haben wir uns zwischen l und n, sowie zwischen l und m ein Stück von den beiden Kreisen begrenzte, aber zwischen demselben unendlich oft sich hindurchschlingendes Band angehängt zu denken.

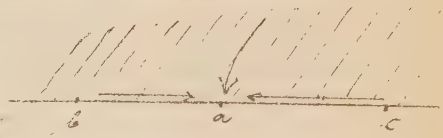
Wir behalten also unser Kreisbogendreieck etwa folgendermaßen:

Unser Bereich hat die Gestalt, daß sich an den [illegible] Teil drei unendlich lange Streifen anhängen, [illegible] der einzelne je von zweien der Kreise

begrenzt sich bandförmig um die Kugel unendlich oft herumwindet.

Das einzelne Band zieht sich dabei über die vom gegenüberliegenden Kreise begrenzte Öffnung selbstverständlich unendlich oft hinweg.

Von bestimmten Punkten, welche man die Ecken dieser dreiseitigen Figur nennen könnte, ist natürlich nicht die Rede.

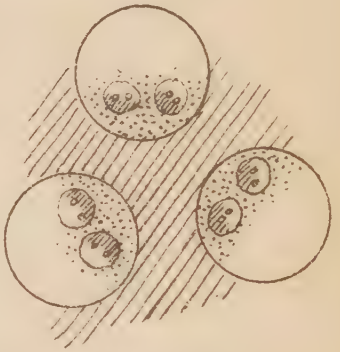


Es ist das so zu verstehen, daß unsere η-Function, wenn x sich dem a, dem b oder dem c innerhalb der positiven Halbebene oder auch am Rande derselben entlang annähert, sich überhaupt keiner festen Grenze nähert, sondern unausgesetzt hin und her schwankt, indem der betr. Punkt der η-Ebene längs der Kreise oder zwischen denselben unendlich oft rund läuft.

Wesentlich ist dabei der Zusatz „in der positiven Halbebene oder auch am Rande derselben entlang."

Um das Verhalten des η bei allgemeineren Annäherungsprocessen zu übersehen, müssen wir erst die analytische Fortsetzung unseres η-Zweiges, wie sie sich durch symmetrische Wiederholung unserer Figur ergibt, in Betracht ziehen.

Wenn wir das Kreisbogendreiseit an einem der begrenzenden Kreise spiegeln, so entsteht in demselben ein ähnliches Kreisbogendreiseit, welches außer von dem Spiegelkreise noch von zwei in demselben liegenden Kreisöffnungen begrenzt wird und sich zwischen diesen drei Grenzen ebenso wie der Ausgangsbereich mit drei unendlichen Bändern von einem centralen (punktirten) Teil aus herumwindet.



Denselben Spiegelungsprocess hat man an jedem der drei Kreise auszuführen, dann an jeder der 6 neuentstandenen Öffnungen zu wiederholen, u. s. w. So erhält man schließlich immer mehr neue Kreise, die aber immer wieder innerhalb der vorhergehenden Kreise liegen, und immer kleiner werden. Diese immer kleiner werdenden Kreise häufen sich dabei gegen einzelne Punkte, Grenzpunkte, welche aber selbst in unendlicher Zahl vorhanden sind und sich selbst wieder gegen unendlich viele Grenzpunkte häufen.

Jedes einzelne Kreisbogendreiseit windet sich von seinem centralen Teil aus unendlich oft zwischen seinen Begrenzungskreisen hin. Nimmt man noch die

der negativen Halbebene entsprechenden drei ersten Spiegelbilder hinzu, so erhält man einen von 6 Kreisen begrenzten Bereich, der sich jetzt mit 6 Bändern zwischen den 6 Kreisen hindurchwindet. Bei nochmaliger Spiegelung erhält man einen Bereich mit 12 Bändern zwischen 12 Kreisen u. s. fort. Denkt man sich diesen Process unbegrenzt fortgesetzt, so arten die Kreise schließlich in die unendlich vielen übrigens auf dem Orthogonalkreis liegenden Grenzpunkte aus, und die Gesamtfläche, welche von den unendlich vielen Bereichen gebildet wird, windet sich von dem centralen innerhalb des Orthogonalkreises liegenden Teil zwischen den unendlich vielen Grenzpunkten unendlich oft hindurch.

Wir fassen zusammen:

Bei symmetrischer Wiederholung unserer von drei Kreisen begrenzten Figur bekommen wir unendlich viele Kreislinien, welche sich gegen bestimmte, selbst in unendlicher Anzahl vorhandene auf dem Orthogonalkreis liegende Punkte hin häufen, und jedesmal drei zusammengehörige Kreislinien begrenzen dann ein Bild der positiven oder negativen Halbebene & in der Weise daß von einem centralen Teil aus sich zwischen je zweien der Kreise immer unendlich langes Band herumwindet.

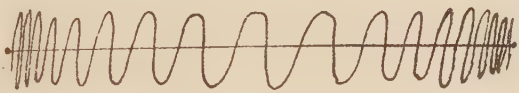
Die Gesamtüberdeckung der η-Ebene mit η-Bereichen kann man sich so vorstellen, daß man sich zuerst die unendlich vielen Grenzpunkte auf dem Orthogonalkreis gezeichnet denkt und dann zwischen je zwei benachbarten dieser Punkte an das Innere des Orthogonalkreises je eine, unendlich oft zwischen den beiden Punkten sich herumwindende Fläche angehängt denkt. Auf dieser so erhaltenen unendlichblättrigen Riemann'schen Fläche mit unendlich vielen Verzweigungspunkten liegt dann eine Einteilung in unendlich viele abwechselnd schraffirte und nicht schraffirte Bereiche, die sich jeder zwischen nur dreien der Verzweigungspunkte der Fläche herumwinden.

Wir fügen an diese Besprechung der conformen Abbildung noch eine Bemerkung, wie sich nämlich der seiner Zeit aus der conformen Abbildung bei reellen λ, μ, ν gezogene Schluß auf die <u>Realität der 0 Stellen einer ϑ-Function</u> modificirt.

Die Seiten überschlagen sich in unserem jetzigen Fall von dem Mittelstück aus nach jeder Seite hin unendlich oft. Durch die Anzahl der Überschlagungen ist aber im Wesentlichen die Anzahl der 0 Stellen gegeben, welche ein reeller Zweig einer zu η gehörigen ϑ-Function in dem entsprechenden Intervalle der x-Axe

besitzt, oder die Anzahl der Oscillationen, welche die Curve $y = P(x)$ in dem Intervall ausführt. Hier werden wir also schliessen:

Unserer η-Figur entsprechend werden die reellen Curven $y = P(x)$ bei Annäherung an die singulären Punkte a, b, c unendlich viele Oscillationen ausführen:

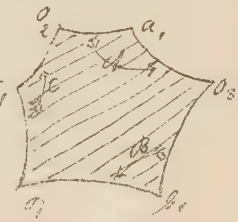


(Vi. d. 6 März 94)

Heute will ich noch einiges Wenige über den Fall beliebig complexer, nicht nur rein imaginärer Exponenten angeben.

Ich teile meine Bemerkungen, die natürlich nur eine Skizze sein können, in eine Reihe von Nummern.

1.) Es führt jetzt, da die rechte Seite der Differentialgleichung für η auf keine Weise reell ist, zu keiner Vereinfachung der Betrachtung, wenn wir die x-Ebene längs der ganzen reellen Axe aufschneiden wollten. Wir werden daher die bereits früher eingeführte allgemeinere Zerschneidung ein, indem wir von einem beliebigen Punkte O aus drei Einschnitte von



beliebiger Gestalt nach den drei singulären Punkten a, b, c hin legen. Der so zerschnittenen x-Ebene wird als Abbildung durch irgend einen Zweig η ein von 6 Curvenstücken begrenzter Bereich der η-Kugel entsprechen, und zwar entsprechen den singulären Punkten a, b, c drei im Sinne des Umzeigers aufeinanderfolgende, aber noch durch je eine andere Ecke voneinander getrennte Ecken a_1, b_1, c_1 des Bereichs, während die dazwischen liegenden Bereichsecken O_1, O_2, O_3 den drei um O herum liegenden Winkelräumen correspondiren.

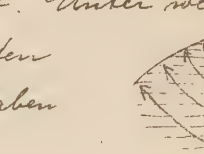
Dabei sind die den gegenüberliegenden Ufern der drei Einschnitte entsprechenden, von a_1, b_1, c_1 auslaufenden Kanten durch je eine lineare Substitution A, B, C paarweise zusammengeordnet.

2) Die Substitutionen A, B, C deuten wir uns als drei Schraubenbewegungen um drei durch a_1, b_1, c_1 hindurchgehende Geraden, den <u>Kern</u> des Bereichs. Das 6 Eck ist mit seinen Ecken a_1, b_1, c_1 in diesen Kern „eingehängt."

3.) Wir untersuchen die <u>Natur der drei Eckpunkte</u> a_1, b_1, c_1. In der Umgebung eines Punktes a besitzt ein Zweig von η die Entwicklung

$$\eta = (x-a)^{\lambda} \varphi(x-a) = (x-a)^{\lambda' + i\lambda''} \chi(x-a) =$$

Denken wir uns nun erst einmal, daß der betreffende Querschnitt der x-Ebene in den Punkt a mit einer bestimmten Tangente einmünde, etwa wie eine gerade Linie, so bildet sich in der η-Ebene das eine Ufer des Querschnitts in der Umgebung des Punktes O wie eine logarithmische Spirale ab, das andere Ufer ebenfalls wie eine logarithmische Spirale, die aber um den Winkel $\lambda' 2\pi$ gegen die erste gedreht ist.



Einem Querschnitte, der in a geradlinig einläuft, entspricht auf der η-Kugel eine Begrenzungscurve des Bereichs, welche a_1 nach Art einer logarithmischen Spirale umkreist.

Wollen wir dagegen umgekehrt geradlinige Endigung der Curve in der η-Ebene haben, so müssen wir, wie leicht zu sehen, den Schnitt in der x-Ebene in bestimmter Weise nach Art einer logarithmischen Spirale in a endigen lassen. Also:

Wir können auch geradliniges Verlaufen der Grenzcurve in der Nähe von a_1 erreichen, nur müssen wir dann den Querschnitt der x-Ebene nach Art einer gewissen logarithmischen Spirale endigen lassen.

Nehmen wir an, dies sei so erreicht. Unter welchem Winkel stoßen dann die beiden Kanten des Bereichs in a_1 zusammen? Wir haben

schon früher gesehen, daß dieser Winkel nur vom reellen Teil des Exponenten λ abhängt, nämlich:

Der Winkel, mit welchem unser Fundamentalbereich an den Punkt a_1 heranreicht, ist seinem absoluten Betrage nach $= 2\lambda'\pi$. Wir haben also einen Windungspunkt, sobald $\lambda' > 1$.

4.) Wir sollen für jedes Tripel complexer Zahlen λ, μ, ν den zugehörigen Fundamentalbereich wirklich construiren.

Da werden wir in der Weise eine Einteilung treffen, daß wir zunächst alle verwandten Bereiche zusammenfassen.

Welche Bereiche heißen verwandt? Solche, die mit gleicher Reihenfolge der Ecken in denselben Kern eingehängt sind. Rechnerisch sind die verwandten Bereiche folgendermaßen charakterisirt (wenn wir von speciellen Fällen absehen):

Verwandt heißen solche zwei Bereiche, deren λ, μ, ν abgesehen vom Vorzeichen sich um reelle Zahlen von gerader Summe unterscheiden:

$$\lambda_1 = \pm\lambda + A, \qquad \mu_1 = \pm\mu + B, \qquad \nu_1 = \pm\nu + C,$$
$$A + B + C \equiv 0 \pmod{2}.$$

Verwandte Bereiche stimmen also abgesehen vom Vorzeichen in den imaginären Teilen ihrer λ, μ, ν überein

Nun haben wir bei reellen λ, μ, ν die Gesammtheit aller mit einander verwandten Dreiecke in 16 Stämme eingetheilt, zu deren jedem ein reducirtes Dreieck gehörte, als einfachster Repräsentant des betreffenden Stammes. Unter diesen 16 reducirten Dreiecken construirten wir zuerst ein bestimmtes, das „Minimaldreieck" und gingen von diesem zuerst zu den 15 anderen reducirten Dreiecken, von diesen endlich durch polare und laterale Anhängung von Kreisbogen zu den allgemeinsten Dreiecken jedes Stammes über *). Ganz entsprechendes müssen wir bei complexen λ, μ, ν ausführen.

Um bei gegebenem Stern alle zugehörigen Bereiche zu construiren, werden wir zuerst einen Minimalbereich construiren, dessen λ, μ, ν die Werthe haben:

$$\lambda_0 \pm i\lambda'', \quad \mu_0 \pm i\mu'', \quad \nu_0 \pm i\nu''$$

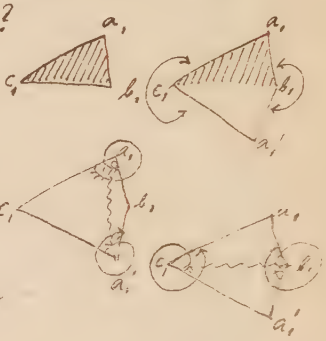
wobei λ_0, μ_0, ν_0 genau denselben Ungleichungen genügen, die wir im Falle reeller λ, μ, ν für das Minimaldreieck aufgestellt haben.

Von da aus construiren wir uns zuerst die einfachsten Repräsentanten der 15 weiteren Stämme der Verwandtschaft, und haben endlich von den 16 so gewonnenen Bereichen aus durch Zufügung beliebiger

*) Ich überspringe hier der Kürze halber die „Zwischendreiecke", die sich in speciellen Fällen einstellten.

ganzer Zahlen von gerader Summe zu den allgemeinsten Bereichen der bezüglichen Stämme aufzusteigen.

5.) Es wäre nun zu untersuchen wie sich die zur Construction des allgemeinsten Bereichs benutzten Processe der polaren und der lateralen Anhängung von Kreisscheiben an die Dreiecke auf unsere nichtsymmetrischen ganzen Bereiche übertragen?



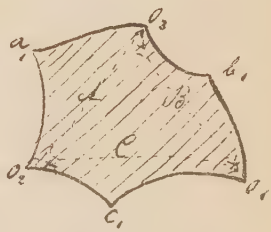
Wir denken uns zunächst einmal ein Dreieck mit reellen Winkeln durch sein Spiegelbild zu einem Vollbereiche ergänzt. Hängen wir nun längs eines von a_1 nach der Seite b_1 c_1 gelegten Verzweigungsschnittes eine Halbebene polar an das Dreieck an, so müssen wir eben dasselbe an dem symmetrischen Dreieck ausführen. Dann haben wir aber einfach an den Vollbereich längs eines von a_1 nach a_1' reichenden Verzweigungsschnittes eine Vollebene angehängt. Hängen wir andererseits an b_1 c_1 lateral eine Halbebene an, so gibt das mit der an dem symmetrischen Dreieck ebenfalls anzuhängenden Kreisscheibe zusammen eine Vollebene, die an den Vollbereich längs eines Verzweigungsschnittes von b_1 nach c_1 angehängt ist. In dieser Gestalt, am Vollbereiche betrachtet, sind die beiden Anhängungsprocesse nun auch für nichtsymmetrischen

Bereiche brauchbar.

Die polare Anhängung einer Kreisscheibe vom Punkt a_1 aus erscheint jetzt als Anhängung einer Vollkugel längs derjenigen Diagonale des Bereichs, die von a_1 nach a_1' geht, die laterale Anhängung einer Kreisscheibe längs $b_1 c_1$ als Anhängung einer Vollkugel längs der Diagonale von b_1 nach c_1.

Dies sind Beispiele dafür, wie sich die Processe, die wir bei den Dreiecken studirt haben, auf die allgemeineren Bereiche übertragen.

5.) Construction des Minimalbereichs zu einem gegebenen Kern. Mit dem Kern ist das Minimaltripel $\lambda_0 + i\lambda''$, $u_0 + iu''$, $v_0 + iv''$ gegeben. Dann kommt es zuerst darauf an, die richtigen Ecken a_1, b_1, c_1 unter den drei Paaren von Schnittpunkten der Schraubenaxen mit der Kugelfläche auszuwählen.



Darauf wähle man irgend einen Punkt o_1 aus, wende auf ihn die Schraubenbewegung C mit der Amplitude $v_0 + iv''$ an, wodurch er in einen anderen Punkt o_2 übergeht. Auf o_2 wende man dann die Schraubenbewegung A mit der Amplitude $\lambda_0 + i\lambda''$ an und nenne den neuen Punkt o_3.

Unterwirft man diesen Punkt nach der Schraubenbewegung B,

so geht er wieder in den ursprünglich gewählten Punkt O_1 über, infolge der Relation

$$A\,B\,C = 1 .$$

Damit hat man alle 6 Ecken des Bereichs. Man verbinde nun O_1 mit c_1 durch irgend eine Curve. Durch die Schraubenbewegung C erhält man daraus sogleich auch die Kante $O_2\,c_1$; dann hat man wieder $O_2\,a_1$ willkürlich zu wählen, wodurch $O_3\,a_1$ vermöge A bestimmt wird; endlich wählt man noch das Randstück $O_3\,b_1$ beliebig, erhält vermöge B das entsprechende Stück $O_1\,b_1$ und hat so einen geschlossenen Curvenzug, einen brauchbaren Fundamentalbereich, vorausgesetzt, daß man die 3 willkürlichen Curvenzüge $O_1\,c_1$, $O_2\,a_1$, $O_3\,b_1$ so wählen kann, daß sie weder sich selbst, noch einander, noch eine der durch $A\,B\,C$ aus ihnen entstehenden anderen drei Randcurven überschneiden. Haben wir wirklich einen solchen Bereich mit Kantenzuordnung $A\,B\,C$ construirt, dann wissen wir auch nach dem Riemann'schen Existenzsatz, daß es zugehörige η-Functionen gibt, welche den Bereich gerade auf die ganze Ebene abbilden.

Also:

Wenn es uns gelingt, so wie in der Figur von irgend beliebigen Punkte O_1 beginnend durch Ziehen

drei willkürlichen Curven $0, c_1, 0_2 a_1, 0_3 b_1$ einen einfach zusammenhängenden Bereich abzugrenzen, dann haben wir damit einen Fundamentalbereich der η-Function, denn der Riemann'sche Existenzsatz zeigt, daß es eine Function $x(\eta)$ gibt, welche den so gewonnenen Bereich genau auf eine zerschnittene x-Ebene abbildet, und diese Function $x(\eta)$ wird von selbst alle bei Definition der η-Function eingeführten Eigenschaften zeigen.

Die Schwierigkeit ist nur, für alle möglichen Fälle des Genus wirklich allemal einen solchen Bereich, der einfach zusammenhängend in den Rahmen der 8 Kanten eingespannt ist, zu construiren, und mit dem Nachweise der Möglichkeit für jeden Fall ist Schilling noch beschäftigt.

7) Unsere nächste Aufgabe ist die Herstellung der verwandten Bereiche aus dem Minimalbereich durch geometrische Processe.

Weiterhin zeigt wieder das Riemann'sche Existenztheorem, daß zu jedem dieser Bereiche eine Function $\eta(x)$ gehört, mit andern Worten, daß die verwandten Functionen auch wirklich existiren.

8) Daß es möglich sein muß, unseren geometrischen Ansatz durchzuführen, daß wirklich zu jedem λ, μ, ν

eine zugehörige η-Function, also auch ein zugehöriger Fundamentalbereich existirt, das wissen wir von ganz anderer Seite her, nämlich aus der Existenz der Differentialgleichung für $\eta(\lambda, u, v, x)$.

Aber uns liegt grade daran, die Existenz der Function von vornherein aus ihrer Definition zu erschliessen, statt sie nachträglich durch die Formel zu begründen. Wir sagen so:

Indem wir für jedes Wertetripel λ, u, v geometrisch einen brauchbaren Fundamentalbereich construiren, gewinnen wir einen neuen Existenzbeweis für die Function $\eta(\lambda, u, v, x)$.

Mit diesem neuen Existenzbeweis ist eine principielle Lücke in dem Gedankengang der Riemann'schen Arbeit ausgefüllt, insofern nicht nur die Eigenschaften der η-Function, sondern auch die Existenz derselben rein geometrisch erschlossen wird, während Riemann bekanntlich zu dem Zweck in seiner Arbeit über die ζ-Function zu der Differentialgleichung zurückgegriffen hat. Dieser directe Existenzbeweis dürfte um so wichtiger sein, als nur durch ihn die Gedanken weitergeführt werden können, von denen Riemann in dem Fragmente ausgeht, das ich zum Schluss zur Weihnachten erläutert habe.

Damit schliesse ich die gegenwärtige Vorlesung, in deren erstem Teile, bis Weihnachten, ich als Ziel das allseitige Verständnis der Riemann'schen Arbeit gesteckt hatte, während wir im zweiten Teil unsere Aufmerksamkeit auf die ebenfalls auf Riemann zurückgehende conforme Abbildung gerichtet, und wenigstens für reelle Exponenten eine grosse Reihe neuer interessanter Eigenschaften daraus erschlossen haben.

Berichtigungen und Nachträge

S. 93 Z. 13 v. o. lies dort statt doppelt.

„ 113 „ 12 „ „ Cah „ Cap.

„ 124 „ 2 v. u. „ Goldbach „ Goldboot.

„ 128 „ 2 v. o. „ $\frac{\Gamma(p+1)}{p}$ „ $\frac{T(p+c)}{p}$

„ 148 „ 3 „ „ $(bc)^{\alpha+1}(ca)^{\beta+1}(ab)^{\gamma+1}$ „ $(bc)^{\alpha-1}(ca)^{\beta+1}(ab)^{\gamma-1}$

zu S. 40. Z. 16.

Picard hat diese Functionen in ähnlicher Weise durch Functionaleigenschaften definirt, wie dies Riemann für die gewöhnliche P-Function gethan hat. (Ec. Norm. 1887)

Andererseits hat Horn unsere Functionen von dem System linearer partieller Differentialgleichungen aus studirt, dem sie genügen. (Acta math 12. 1889).

zu S. 41. Z. 4.

Ferner hat Thomae in Cr. J. Bd. 87. 1879 den Riemann'schen Ansatz dahin verallgemeinert, daß er eine Function $W\left(\begin{matrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{matrix}\, x\right)$ einführt, welche in Bezug auf x einer Differenzengleichung genügt. Wegen der Einzelheiten, insbesondere auch der Beziehungen zu sonstigen Untersuchungen sei auf die Originalabhandlung verwiesen.

zu S. 248. Z. 20

Vergl. auch Fuchs, Berichte d. Berl. Ak. 1888–93.

zu S. 92. Z. 3.

Hierbei sind übrigens zwei besondere Fälle zu beachten, in denen die weiteren an diese Ausdrücke zu knüpfenden Folgerungen versagen, und welche wir deswegen hier ausdrücklich ausschließen müssen; nämlich erstens der Fall, daß eine oder mehrere der Exponentendifferenzen $\alpha-\alpha'$, $\beta-\beta'$, $\gamma-\gamma'$ ganze Zahlen sind, so daß einzelne der Ausdrücke α_γ u. s. w. unendlich werden, und zweitens der Fall, daß eine der 8 Summen

$$\pm(\alpha-\alpha') \pm(\beta-\beta') \pm(\gamma-\gamma')$$

eine ungerade ganze Zahl ist; im letzteren Fall werden nämlich einzelne der Nenner unendlich, also einzelne der Coefficienten α_γ u. s. w. gleich 0. Der erste Ausnahmefall ist von Riemann in seiner Arbeit von vornherein ausgeschlossen worden, den zweiten dagegen hat er übersehen. Vergleiche hiezu die geometrischen Auseinandersetzungen auf S. 411.

Zu S. 190. Z. 10.

Im Falle, daß $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu$ eine ungerade ganze Zahl ist, können einzelne dieser Integrale identisch verschwinden. Es ist das derselbe Ausnahmefall, von dem wir auf S. 411 etwas ausführlicher handeln werden.

Z. S. 216 ff. Wegen des von Riemann übersehenen Ausnahmefalls $\pm\lambda \pm\mu \pm\nu = 2r+1$ vergl. S. 411. Zu S. 501, Z. 3 v. u. [illegible] dies immer statt nimmer.

517.88 K64U

a39001 006926771b

.88
+u

20213